

文章编号: 1000-5641(2017)01-0019-07

探索 2-边连通图的等价定义

苏 静, 马 飞, 姚 兵

(西北师范大学 数学与统计学院, 兰州 730070)

摘要: k -边连通图在网络研究和图论研究中有着极其重要的地位. 图论中有关 2-边连通图的命题很多, 它们刻画了 2-边连通的本质. 本文给出 17 种关于 2-边连通图的等价性命题, 力图从不同角度深入理解、挖掘 2-边连通图的本征, 并从本文定义的 2 种新运算出发, 提出了新的有关 2-边连通图的命题, 并给出这些命题相互间的等价性证明.

关键词: 2-边连通图; 耳边分解; 块; 迹; 圈

中图分类号: O157.5 **文献标志码:** A **DOI:** 10.3969/j.issn.1000-5641.2017.01.003

Probing equivalent definitions of 2-edge connected graphs

SU Jing, MA Fei, YAO Bing

(College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University,
Lanzhou 730070, China)

Abstract: As known, k -edge connected graphs play an important role in the research of networks and graph theory. There are many propositions of 2-edge connected graphs nowadays, which depict the essences of 2-edge connected graphs. We present 17 equivalent propositions of 2-edge connected graphs and dig more properties of 2-edge connected graphs from different aspects of 2-edge connected graphs. Furthermore, two equivalent propositions of 2-edge connected graphs by two new operations are proposed, and then we provide the equivalent proofs between the propositions we have collected and discovered.

Key words: 2-edge connected graph; ear edge decomposition; block; trail; cycle

0 引言及概念

众所周知, 连通图在通信网络、社交网络、交通网络等有着广泛的应用^[1-2]. 例如: 在通信网络中, 即所有可能的信息传输线路构成的图中, 点代表发射机, 连接各点的边代表通信线路, 或许网络中发射机的可靠性很高以至于不会瘫痪, 但是通信线路可能会受到噪音干扰或其他干扰从而中断连接^[3-5]. 介于这种情况, 人们希望网络不会因为删除了某些连接而变得不稳定、不连通(如通讯中断、交通瘫痪等). 在数学的分支图论中, 连通图占据着十分重

收稿日期: 2015-12-28

基金项目: 国家自然科学基金(61163054, 61163037, 61363060)

第一作者: 苏 静, 女, 硕士研究生, 主要研究方向为图的标号及复杂网络. E-mail: 1099270659@qq.com.

通信作者: 姚 兵, 男, 教授, 研究方向为图着色与标号以及复杂网络. E-mail: yybb918@163.com.

要的研究地位, 因此对连通图的深入研究不仅是数学理论的需要, 同时更重要的是为研究实际网络结构提供可靠的理论依据和可行的技术手段. 本文以 2-边连通图为例展开讨论, 研究 2-边连通图的结构并描述 2-边连通图的特征.

关于 2-边连通图的充分必要条件可以在许多文献中看到. West 在他的书^[6]中给出了 2-边连通图的 6 种等价性命题. Bondy 和 Murty 在他们的书^[7]中, 给出了关于 2-边连通图特征的 4 个等价性命题. 这些相互等价的命题是从不同的角度来刻画 2-边连通图. 本文整理了有关 2-边连通图的若干充分必要条件, 也为收集到的若干充分必要条件提供较为简单的证明. 更为重要的是, 本文对 2-边连通图定义了 2 种新运算, 分别是割点均匀剖分运算和反三角形边收缩运算, 由此两种运算得到了 2 个新定理, 本文分别给出了它们的证明.

1^[7] 图 G 的边割 E^* 是图 G 的边子集, 使得图 $G - E^*$ 的分支数目大于图 G 的分支数目. 一个 k 边割是指包含 k 条边的边割. 图 G 的所有 k 边割中最小的 k 称为图 G 的边连通度. 若图 G 的边连通度大于等于 k , 则称图 G 为 k -边连通的.

2^[6] 图 G 的一个耳朵是指图 G 中内部顶点的度数均为 2 的极大路. 图 G 的闭耳是图 G 中除一个顶点外其他顶点的度均为 2 的一个圈. 图 G 的一个耳边分解是满足下面条件的分解 C_0, P_1, \dots, P_k : C_0 是一个圈, 当 $i \geq 1$ 时, P_i 要么是 $C_0 \cup P_1 \cup \dots \cup P_i$ 的耳, 要么是 $C_0 \cup P_1 \cup \dots \cup P_i$ 的闭耳, 称 C_0 为这个耳边分解的起始圈.

3^[6] 一条 (u, v) -链是一系列圈 C_1, C_2, \dots, C_k , 使得 $u \in V(C_1)$ 和 $v \in V(C_k)$, 并且相继的两个圈 C_i 和 C_{i+1} ($1 \leq i \leq k-1$) 有且只有一个公共顶点, 且当 $|i-j| \neq 1$ 时, 圈 C_i 与圈 C_j 不相交(示例见图 1).

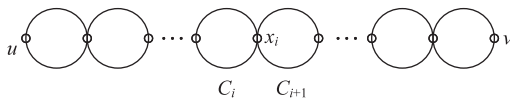


图 1 一条 (u, v) -链

Fig. 1 A (u, v) -chain

4^[6] 对图 G 的一个顶点 x 和一个顶点子集 U , 一个 (x, U) -迹扇是指从 x 到 U 的每个顶点的迹构成的集合, 且此集合中任意 2 条迹在图 G 中无公共边(示例见图 2).

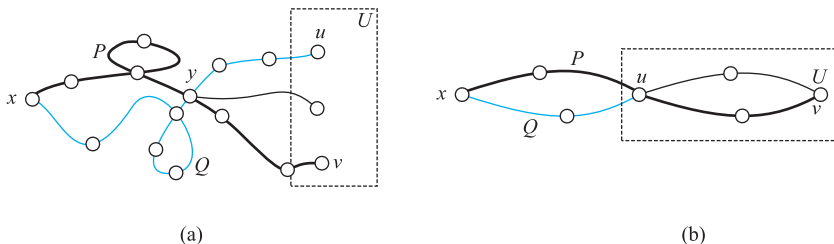


图 2 (a) 一个 (x, U) -迹扇, 粗线是 (x, v) -迹 P , 蓝色线是 (x, u) -迹 Q ;

(b) 一个特殊的 (x, U) -迹扇, (x, v) -迹必须通过顶点 u

Fig. 2 (a) An (x, U) -trail fan, where the (x, v) -trail P is in thick line, the (x, u) -trail Q is

blue line; (b) An (x, U) -trail fan, but any (x, v) -trail must pass the vertex u

5^[6] 设图 G 是无割边的连通图, 图 G 的块分解是指图 G 含有边不交的块 B_1, B_2, \dots, B_m , 使得 $E(G) = \bigcup_{i=1}^m E(B_i)$, 并且对 $i \neq j$, 有 $V(B_i) \cap V(B_j) = \emptyset$, 或者 $V(B_i) \cap V(B_j) = \{x\}$, 其中 x 是图 G 的割点.

文献^[7]给出如下的概念: 没有割点的连通图称为块. 若顶点与边的交错链 $W = x_1 e_1 x_2$

$e_2, \dots, x_{n-1}e_{n-1}x_n$ 满足边 e_i 的 2 个端点是 x_i 和 x_{i+1} , 且有 $e_i = e_j$, 称 W 为途径. 若 W 中没有重复的边, 但有 $x_i = x_j$, 且 $i \neq 1, j \neq 1$, 则称 W 为迹. 起终点相同且每条边均不重复的 W 称作闭迹. 图的极小边割称为键. 一条迹 W 的起、终点的顶点叫做 W 的内部顶点.

顶点均匀剖分运算是指: 对任意度数不小于 4 的顶点 $u \in V(G)$, 将顶点 u 剖分成 2 个顶点 u', u'' , 把 u 的度大致均匀地分配给顶点 u' 和顶点 u'' , 使得 2 个顶点的度要么相等, 要么相差一度; 然后, 用一条边将顶点 u' 和顶点 u'' 连在一起.

不难看出, 对顶点 u 实施顶点均匀剖分运算后, 顶点 u' 和顶点 u'' 的度数之和是原来顶点 u 的度数加 2. 图 3 给出了顶点均匀剖分运算的一个例子, 即对图 3(a) 所示的图 G 的顶点 y 和顶点 w 实施均匀剖分运算, 得到图 3(b) 所示的图 H .

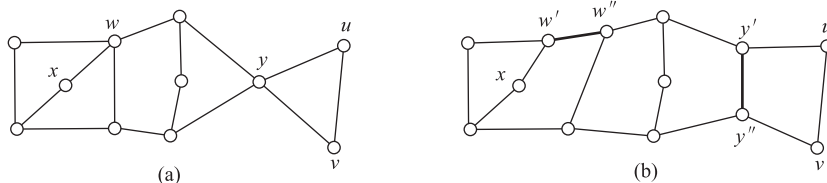


图 3 (a)图 G ; (b)图 H

Fig. 3 (a) Graph G ; (b) Graph H

1 定理及证明

定理1 图 G 是 2-边连通图当且仅当对图 G 中的每一个割点作均匀剖分运算所得新图是 2-连通图(示例见图-3).

证 明 必要性 设图 G 是 2-边连通图, 图 G 的所有割点为 u_1, u_2, \dots, u_k , 则每个割点在对应的图 G 的块中的度数至少是 2. 对每一个割点作均匀剖分运算, 将割点 u_i 剖分成 2 个顶点 u'_i 和 u''_i , 得新图 H , 使得每对顶点 u'_i 和 u''_i 构成图 H 的一个最小顶点割. 这是能够做到的, 因割点 u_i 在块 G_i 中的度数至少是 2, 使得顶点 u'_i 与块 G_i 中的一个顶点相连, 顶点 u''_i 与块 G_i 的一个顶点相连. 显然, 图 H 为 2-连通图. 此外, 因图 G 是 2-边连通的简单图, 图 H 的每条边 $u'_i u''_i$ 不在图 H 的任何一个三角形中.

充分性 对图 G 中的每一个割点 u_i , 图 H 有相应的顶点 u'_i 和 u''_i , 那么作均匀剖分运算的逆运算, 即是收缩边 $u'_i u''_i$, 将顶点 u'_i 和顶点 u''_i 重合成原来的顶点 u_i , 从而得到图 G . 注意到, 边 $u'_i u''_i$ 不在图 H 的任何一个三角形中, 也就是说, 收缩它不会产生图的割边. 因此, 图 G 为 2-边连通图.

2-连通图一定是 2-边连通图, 但 2-边连通图不一定是 2-连通图. 本文对 2-边连通图定义了顶点均匀剖分运算, 定理 1 使得非 2-连通的连通图可以转化为 2-连通图, 使得 2-连通图的若干性质与 2-边连通图的若干性质可以对应起来, 方便人们深入研究它们的性质. 下面列出 2-边连通图的若干等价命题. 为了不与 2-连通图的命题重复, 以下总假定讨论的图有割点.

定理2 设图 G 是无割边、有割点的连通图. 下面的命题相互等价.

- (1)^[7] 图 G 是 2-边连通图.
- (2)^[7] 图 G 有块分解.
- (3)^[6] 图 G 的任意 2 个顶点至少被 2 条无公共边的迹所连通.
- (4)^[6] 对任意 2 个顶点 $u, v \in V(G)$, 图 G 中存在一条 (u, v) -链.
- (5)^[6] 图 G 有一条包含任意 2 个顶点的闭迹.

- (6) 将图 G 中的路 uvw 换成边 uv 后得到的图是 2-边连通图, 其中 w 是 2 度顶点.
- (7) 在图 G 添加一个新顶点 w , 并将顶点 w 与 G 中任意一对顶点 u, v 分别相连得到的图是 2-边连通图.
- (8)^[6] 对于图 G 的至少具有 2 个顶点的子集 U 和子集 U 外的一个顶点 x , 图 G 有一个 (x, U) -迹扇.
- (9)^[7] 图 G 的任意一个顶点和任意一条边都位于同一条闭迹上.
- (10) 图 G 有一条最长闭迹 T , 使得 G 的任何一条边要么在 T 上, 要么在一条起终点均在 T 上的(闭)迹上.
- (11)^[6] 图 G 有一条包含任意 2 条边的闭迹.
- (12)^[7] 对每一对满足顶点个数 $|X| \geq 2$ 和 $|Y| \geq 2$ 的不相交的顶点子集 X 和 Y , 图 G 含有 2 条边不交的迹, 使得每条迹的起点在 X 中, 终点在 Y 中, 且这 2 条迹的内部顶点均不在 X 和 Y 中.
- (13)^[8] 对于图 G 的任意 2 个顶点 u, v 和任意的一条边 e , 图 G 有包含边 e 的 (u, v) -迹.
- (14)^[8] 对于图 G 的任意 3 个顶点 u, v, w , 图 G 有包含顶点 w 的 (u, v) -迹.
- (15)^[6] 图 G 有耳边分解, 并且 G 的每个圈均是图 G 的某个耳边分解的起始圈.
- (16)^[8] 对于图 G 的任意 3 个顶点 u, v 和 w , 图 G 有不包含顶点 w 的 (u, v) -迹.
- (17)^[9] 图 G 的任意 2 条边都在图 G 的同一个键中.

证明 以下用符号 $(i) \Rightarrow (j)$ 表示从命题 (i) 推证命题 (j) , $1 \leq i, j \leq 17$ 且 $i \neq j$.

$(1) \Rightarrow (2)$. 设图 G 有 k 个割点, 对图 G 作块化运算: 设 x 是图 G 的一个割点, 图 $G - x$ 有分支 G_1, G_2, \dots, G_m . 作图 H_j , 使得 $V(H_j) = V(G_j) \cup \{x\}$, $E(H_j) = E(G_j) \cup \{xy | y \in V(G), xy \in E(G)\}$, $j = 1, 2, \dots, m$. 得到有 m 个分支的图 $G^{(1)}$, 且图 $G^{(1)}$ 的割点数目比图 G 的割点数目少一. 继续对图 $G^{(1)}$ 作块化运算, 直到图 $G^{(k)}$ 没有割点, 也就是说, 图 $G^{(k)}$ 的每个分支都是块, 故图 $G^{(k)}$ 即为图 G 的块分解图, 命题 (2) 成立.

$(2) \Rightarrow (3)$. 由命题 (2) 知, 图 G 存在块分解. 则图 G 中每一个顶点至少属于一个块. 且块与块之间以图 G 的割点相互连接. 对于图 G 中任意 2 个顶点 u, v , 若 u, v 属于图 G 的同一个块, 则在此块中必然存在两条连接 u, v 且无公共边的路. 若 u, v 分别属于图 G 的不同块 B_i 与 $B_j (i \neq j)$, 其中块 B_i 和 B_{i+1} 以割点 v_i 在图 G 中连接. 不妨设有块 B_i, B_{i+1}, \dots, B_j , 使得 B_s 与 B_{s+1} 只有唯一的公共顶点 v_s , 这个顶点也是图 G 的割点. 对 $s = i, i+1, \dots, j$, 在 B_s 中有 2 条内部不交的 (v_{s-1}, v_s) -路 P_{s1} 和 P_{s2} , 这里 $u \in V(B_i)$ 且 $u \neq v_i$, $v \in V(B_j)$ 且 $v \neq v_j$. 则从 u 到 v 由 $P_1 = \bigcup_{s=i}^j P_{s1}, P_2 = \bigcup_{s=i}^j P_{s2}$ 连通, 显然 P_1 和 P_2 是 2 条无公共边的迹.

$(3) \Rightarrow (4)$. 根据命题 (3), 对于任意的 $u, v \in V(G)$, 则 u, v 至少被 2 条无公共边的迹 W_1 与 W_2 所连, 分析以下情形. 情形 1, W_1 与 W_2 之间除了 u 与 v 之外再无别的交点, 则 W_1, W_2 与端点 u, v 构成的闭迹 W 中可找出一个圈 C , 它是一个 (u, v) -链. 情形 2, W_1 与 W_2 之间除了端点 u, v 外还有其他 n 个交点, 记其交点为 x_1, x_2, \dots, x_n (沿 W_1 迹从顶点 u 到顶点 v 的方向标记). 则 u 与 x_1 之间的 W_1 迹与 W_2 迹与端点 u, x_1 相连构成一个圈 C_1 . 同理, 交点 x_1, x_2 位于圈 C_2 上, 以此类推, 交点 x_n 和顶点 v 位于圈 C_{n+1} 上. 从而找到一个 (u, v) -链, 命题 (4) 得证.

$(4) \Rightarrow (5)$. 根据命题 (4), 对图 G 中任意 2 个顶点 u, v , 图 G 中存在一条 (u, v) -链. 而 (u, v) -链也是一条闭迹, 又因为顶点 u, v 的选取是任意的, 故图 G 的任意 2 个顶点在图 G 的一个闭迹中.

(5) \Rightarrow (6). 设图 G 有路 uvw , 其中 w 是 2 度顶点. 根据命题(5), G 有一条包含顶点 u 和 w (或顶点 v 和 w)的闭迹 P , 注意 w 是 2 度顶点, 那么顶点 v 必在闭迹 P 中. 在 G 中将路 uvw 换成边 uv , 则很显然 u 与 v 仍然被包含在这个闭迹中. 故新得到的图 H 是 2-边连通的. 有时, 图 H 可能不再是简单图, 是有重边的伪图.

(6) \Rightarrow (7). 给图 G 添加一个顶点 w , 将 w 与任意选择的一对顶点 u 和 v 相连得图 H . 若 H 有割边 xy , 则 $H - xy$ 有 2 个分支 H' 和 H'' , 若有 $u, v, w \in V(H')$, 在图 $H - xy$ 中用边 uv 替换路 uvw 得 H^* . 根据命题(6), H^* 是 2-边连通图, 这与 H^* 有 2 个分支矛盾, 故图 H 无割边, H 是 2-边连通图.

(7) \Rightarrow (8). 设 U 是图 G 的至少有 2 个顶点的顶点子集, 顶点 $x \in V(G) \setminus U$. 对 U 中的任意 2 个顶点 u, v , 添加一个新顶点 w , 并将 w 与 u, v 分别连边得到新图 H . 由命题(7), 图 H 是 2-边连通的, 故顶点 x 和顶点 w 在同一条闭迹上. 则在图 $H - w = G$ 中, 有 2 条无公共边的 (x, u) -迹和 (x, v) -迹, 由于选取顶点 u, v 是任意的, 从而证得图 G 有一个 (x, U) -迹扇.

(8) \Rightarrow (9). 任取图 G 的一个顶点 x 和一条边 $e = uv$. 令 $U = \{u, v\}$. 命题(8)指出, 图 G 有一个 (x, U) -迹扇. 根据 (x, U) -迹扇的定义, 图 G 有边不交的 (x, u) -迹和 (x, v) -迹, 它们与边 $e = uv$ 构成图 G 的一条闭迹. 证得命题(9).

(9) \Rightarrow (10). 设图 G 的最长闭迹为 T , 若边 e 在最长闭迹上, 证毕. 若边 e 不在最长闭迹 T 上, 则取 T 上的一个顶点 u , 由命题(9)可知顶点 u 与边 e 位于图 G 的同一条闭迹 W 上. 若 W 与 T 有一个交点, 则边 e 在一条起终点均在 T 上的闭迹; 若 W 与 T 有 $k(k \geq 2)$ 个交点, 边 e 位于一条起点和终点均在 T 上的迹.

(10) \Rightarrow (11). 情形 1: 若 2 条边 e_1, e_2 均在图 G 的最长闭迹 T 上, 则命题(11)成立. 情形 2: 若边 e_1 在最长闭迹 T 上, 而边 e_2 不在, 根据命题(10), e_2 位于一条起终点均在 T 上的(闭)迹 W , 则 $T \cup W$ 是一个包含边 e_1, e_2 闭迹. 情形 3: 若边 e_1 和边 e_2 均不在 T 上, 命题(10)已证 e_i 在一个起终点均在 T 的(闭)迹 $W_i (i = 1, 2)$ 上, 从而 $T \cup W_1 \cup W_2$ 是一个包含边 e_1, e_2 的闭迹.

(11) \Rightarrow (12). 设图 G 的 2 个顶点子集 $|X|, |Y|$ 有顶点个数 $|X| \geq 2$ 和 $|Y| \geq 2$. 情形 1: 如果顶点子集 X 中的 2 个顶点 x_1, y_1 也是图 G 的边 e_1 的顶点, 即 $e_1 = x_1y_1$; 顶点子集 Y 中的 2 个顶点 x_2, y_2 也是图 G 的边 e_2 的顶点, 有 $e_2 = x_2y_2$. 那么, 由命题(11)知, 边 e_1 和边 e_2 同在同一条闭迹上, 故至少由 X 到 Y 至少有 2 条边不交的迹, 如果 X 和 Y 之间的每条迹的内部顶点不是全在 X 和 Y 时, 例如 $W = x_1e_1u_1e_2u_2, \dots, e_nu_ny_1$ 是 X 和 Y 之间的迹. 选择 W 的子迹 W' , 使得 $|V(W') \cap X| = 1, |V(W') \cap Y| = 1$, 命题(12)成立. 情形 2: 如果顶点子集 X 或 Y 中没有 2 个顶点是图 G 的某条边的端点. 那么, 给图 G 添加 2 条边 $e_X = x_1x_2$ 和 $e_Y = y_1y_2$, 其中 $x_1, x_2 \in X$ 和 $y_1, y_2 \in Y$, 得到新图 $H = G + e_X + e_Y$. 相同于情形 1 的证明, 命题(12)证毕.

(12) \Rightarrow (13). 对于图 G 的任意 2 个顶点 u, v 和任意一条边 $e = xy$. 令 $X = \{u, v\}$ 和 $Y = \{x, y\}$, 根据命题(12), 图 G 有经过 X 到 Y 的 2 条边不交且内部顶点不在 X 和 Y 中的 (u, x) -迹 W_1 和 (v, y) -迹 W_2 , 则 $W_1 + xy + W_2$ 是一条包含边 e 的 (u, v) -迹.

(13) \Rightarrow (14). 对图 G 的任意 3 个顶点 u, v, w , 设顶点 w 是边 e 的一个端点, 由命题(13), 知图 G 中包含边 e 的 (u, v) -迹. 显然, 这条迹包含了顶点 w , 也就是命题(14)得证.

(14) \Rightarrow (15). 从图 G 中的任意一个圈 C 出发, 建立图 G 的一个耳边分解. 设图 G_i 是连续添加第 i 个耳后得到的图 G 的子图, 若 $G_i \neq G$, 则可以选出 $E(G_i)$ 的一条边 uv , 选择顶

点 $w \in V(G) - V(G_i)$ 使得 w 与 u 以及 v 的距离都最小. 根据命题 (14), 对于任意 3 个顶点 u, v, w , 图 G 有包含顶点 w 的 (u, v) -迹. 此条 (u, v) -迹有 G_i 中的 2 个顶点, 并且每个顶点恰好位于 (u, v) -迹的一端, 因为 w 与 u 和 v 的距离都最小, (u, v) -迹就是一条 (u, v) -路, 也就是一个耳朵. 故可以把 (u, v) -路添加到 G_i 中得到图 G 的更大的子图 G_{i+1} , 其中 (u, v) -路是子图 G_{i+1} 的耳朵. 如果到某子图 G_k 时, 有 $V(G_k) = V(G)$, 且 $E(G) \setminus E(G_k) \neq \emptyset$, 则可给予子图 G_k 添加 $E(G) \setminus E(G_k)$ 中的所有边. 在包含完图 G 的所有边后, 此过程结束, 即给出图 G 的一个耳边分解.

(15) \Rightarrow (16). 由命题 (15) 知, 图 G 存在耳边分解 C_0, P_1, \dots, P_k . 任取顶点 $u, v \in V(G_i)$ 和顶点 $w \in V(G) - V(G_i)$. 在构造耳边分解的过程中, 存在图 G 的一条不经过耳边分解圈 C_0 的且包含顶点 w 的 (u, v) -迹. 对应地, 存在一条经过耳边分解圈 C_0 的不包含顶点 w 的 (u, v) -迹.

(16) \Rightarrow (17). 任取图 G 的 2 条边 $e_i = x_i y_i (i = 1, 2)$. 根据命题 (16), 图 G 有不包含顶点 x_i 的 (y_1, y_2) -迹 $W_i, i = 1, 2$. 同理, 图 G 有不包含顶点 y_i 的 (x_1, x_2) -迹 $T_i, i = 1, 2$. 则有 2 个集合 $S = V(T_1) \cap V(T_2) \supset \{x_1, x_2\}$ 和 $U = V(W_1) \cap V(W_2) \supset \{y_1, y_2\}$. 显然, 顶点子集 S 不含顶点 y_1, y_2 , 顶点子集 U 不含顶点 x_1, x_2 . 扩充顶点集合 S, U 为 2 个更大的不交的连通顶点集 S', U' , 使得 $V(G) = S' \cup U'$, 以及 $y_1, y_2 \notin S'$ 和 $x_1, x_2 \notin U'$, 且顶点集 S' 和顶点集 U' 之间的边的数目最少, 这些边形成图 G 的边子集 E^* . 显然, E^* 包含边 e_1 和边 e_2 . 因 $G - E^*$ 不连通, 它有 2 个分支 G', G'' , 使得 $V(G') = S'$ 和 $V(G'') = U'$. 故 E^* 是图 G 的一个键.

(17) \Rightarrow (1). 根据命题 (17), 图 G 的任意 2 条边都位于图 G 的同一个键中. 键为图的最小边割, 即说明图 G 的键中最少有 2 条边. 这说明图 G 为 2-边连通图.

综上所述, 本定理得证.

反三角形边收缩运算: 对 $e = uv \in E(G)$, 若 e 不在图 G 的任何一个三角形中, 则收缩边 e 使其 2 个端点重合为一个顶点 w_{uv} , 所得图记为 $G \cdot e = G \cdot uv$. 如图 4 所示, 收缩图 G_1 中的粗边得到图 G_2 , 继续收缩图 G_2 的粗边得到图 G_3 , 如此下去, 可将图 G_1 收缩图至图 G_5 , G_5 的所有边都包含在某一个三角形中. 如果一个图的每条边都是某个三角形的边, 则称这样的图为全边三角形图. 显然, 当图 G 是连通图时, 它的全边三角形图是 2-边连通图. 完全图和极大平面图都是全边三角形图. 关于极大平面图, 有著名平面图四色猜想(1997 年被计算机证明, 但至今没有数学证明), 以及唯一可着色极大平面图猜想.

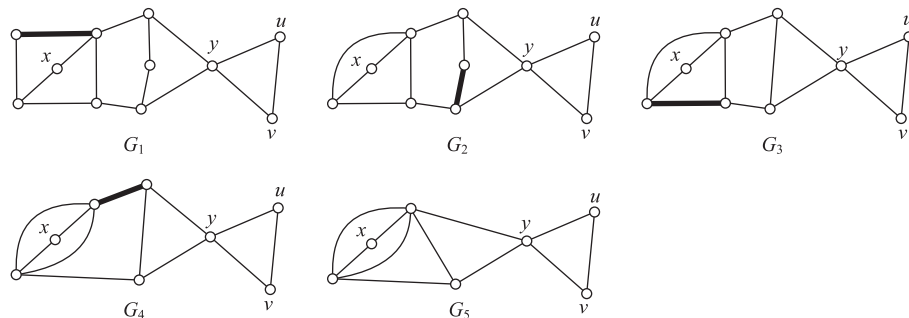


图 4 一个反三角形边收缩的例子

Fig. 4 An example of the anti-triangle edge contraction

定理 3 G 是 2-边连通图当且仅当经过一系列反三角形边收缩运算后得到连通图 H , 使得 H 是全边三角形图.

证 明 充分性 显然, 只要从收缩到最后的全边三角形图 H 原路返回到图 G , 且每一个返回步骤产生的图是 2-边连通图.

必要性 因为图 G 是 2-边连通图, 对 G 作反三角形边收缩运算时, 因为反三角形边收缩运算不产生割边, 边收缩后的图是 2-边连通图. 对所有不在三角形中的边进行边收缩运算, 直到每条边都包含在某个三角形中时, 收缩过程结束. 最终得到的图 H 是全边三角形图. 显然, H 也是 2-边连通图.

2 总 结

本文给出了若干 2-边连通图的等价性命题. 如果对定理 2 中的等价命题进行两两等价性证明, 将要写 $C_{17}^2 = 136$ 个证明. 为此, 我们设计了简单的方案进行定理 2 的证明. 在本文所有的命题中, 将定理 2 中的迹替换成路, 就得到 2-连通图的若干等价命题. 除定理 2 的命题 (1) 为定义性命题外, 其余的均为结构性命题. 命题 (12) 是在命题 (3) 的基础上对图 G 中 2 条不相交的迹的端点作了更为严格的要求. 命题 (5), 命题 (9) 和命题 (11) 都是从 2-边连通图的本质结构出发, 探索 2-边连通图中顶点与顶点, 顶点与边, 边与边之间的位置关系. 命题 (6) 与命题 (7) 分别是指对 2-边连通图的点和边进行代换、添加运算后仍然保持 2-边连通性. 命题 (8) 与命题 (15) 和命题 (17) 从迹扇、耳边分解和键的定义出发展开讨论. 命题 (13)、命题 (14) 和命题 (16) 则从 2-边连通图的结构中探索任意 2 个顶点之间有无包含某个顶点或某条边的迹.

本文的创新点在于定理 1 和定理 3, 以及定理 2 中的命题 (10). 定理 1 定义了割点均匀剖分运算, 定理 3 定义了反三角形边收缩运算. 根据定理 3, 每一个 2-边连通图是对某个全边三角形图实施一系列顶点剖分的结果, 从而给出一种构造 2-边连通图的方法. 定理 2 的命题 (10) 研究了 2-边连通图的最长闭迹与此图的任一条边之间的位置关系. 以上等价命题从多个角度对 2-边连通图的特征进行了刻画. 这里要指出, 定理 2 中的等价命题的相互推证会有其他的简单方案, 也就是说, 本文的证明方案不一定是最简单的. 基于数学的严谨、优美观点, 寻找定理 2 的最简单的证明方案仍然是一项有意义的工作. 我们不能证明, 不存在不同于本文列举的其他的 2-边连通图的等价命题.

[参 考 文 献]

- [1] CRUCITTI P, LATORA V, MARCHIORI M, et al. Error and attack tolerance of complex networks [J]. Physica A, 2004, 340: 388-394.
- [2] KRAPIVSKY P L, REDNER S, LEYVRAZ F. Connectivity of growing random networks [J]. Phys Rev Lett, 2000, 85(21): 4629-4632.
- [3] YAO B, YANG C, YAO M, et al. Graphs as models of scale-free networks [J]. Applied Mechanics and Materials, 2013, 380-384: 2034-2037.
- [4] YAO B, WANG H Y, YAO M, et al. On the collapse of graphs related to scale-free networks [C]//Proceeding of the 3rd International Conference on Information Science and Technology. 2013: 738-743.
- [5] YAO B, LIU X, ZHANG W J, et al. Applying graph theory to the internet of things [C]//2013 IEEE International Conference on High Performance Computing and Communications and 2013 IEEE International Conference on Embedded and Ubiquitous Computing. 2013: 2354-2361.
- [6] WEST D B. 图论导论[M]. 李建中, 骆吉洲, 译. 原书第2版. 北京: 机械工业出版社, 2006.
- [7] BONDY J A, MURTY U S R. Graph Theory with Applications [M]. New York: The Macmillan Publishers, 1976.
- [8] 高随祥. 图论与网络流理论 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2009.
- [9] DIESTEL R. Graph Theory [M]. 于春林, 王涛, 王光辉, 译. 第4版. 北京: 高等教育出版社, 2012.

(责任编辑: 李 艺)