**文章编号:** 1000-5641(2017)06-0050-13

# 一类四阶偏微分方程的对称约化、精确解和守恒律

张丽香, 刘汉泽, 辛祥鹏

(聊城大学 数学科学学院, 山东 聊城 252059)

**摘要**: 利用李群分析研究了一类变系数四阶偏微分方程, 求出方程的李点对称, 把偏微分方程约化为常微分方程, 然后结合 $(G'/G)$ 展开法及椭圆函数展开法, 对约化后的常微分方程求其精确解, 从而得到原方程的精确解. 进一步, 给出这类变系数偏微分方程的守恒律.

**关键词**: 变系数方程; 李群分析; 精确解; 守恒律

**中图分类号**: O175.2 **文献标志码**: A **DOI:** 10.3969/j.issn.1000-5641.2017.06.005

# Symmetry reductions, exact solutions and conservation laws of a class of forth-order partial differential equations

ZHANG Li-xiang, LIU Han-ze, XIN Xiang-peng

(*School of Mathematical Sciences, Liaocheng University, Liaocheng Shandong* 252059, *China*)

**Abstract:** The partial differential equation with constant coefficients can merely approximately reflect the law of motion of substances. Relatively the partial differential equation with variable coefficients can reflect the complex movement of substances more accurately. Therefore, it is more important to study the partial differential equations with variable coefficients. This paper investigates a class of variable coefficient partial differential equations. By using Lie symmetry analysis, the symmetries of the equations are obtained, Then the partial differential equations are reduced to ordinary differential equations. Moreover, we combine with $(G'/G)$ expansion method and elliptic function expansion, so exact solutions to the original equation are obtained. Furthermore, the conservation laws of this kind of variable coefficient differential equations are given.

**Key words:** variable coefficient equation; Lie symmetry analysis; exact solution; conservation law

## 0 引 言

收稿日期: 2016-12-14

基金项目: 国家自然科学基金(11171041, 11505090)

第一作者: 张丽香, 女, 硕士研究生, 研究方向为微分方程理论及应用. E-mail: 244630623@qq.com.

通信作者: 刘汉泽, 男, 教授, 研究方向为微分方程理论及应用. E-mail: hnz_liu@aliyun.com.

由于非线性偏微分方程能够描述物理、生物、化学和医学等领域中的复杂现象, 而且越来越多的数学、物理和工程问题要转化为非线性偏微分方程的求解问题. 因此, 研究偏微分方程有重要的意义. 而非线性偏微分方程的精确解可以更好地解释某些物理现象. 经过多年研究, 人们已经提出许多行之有效的方法, 比如经典李群方法[1-3], Hirota 双线性方法[4-5], 修正的 CK 直接约化方法[6-7], 齐次平衡方法[8-10]等. 其中李群方法是研究微分方程的有力工具之一, 寻找方程的李点对称, 由已知解生成新解, 从而建立新解和旧解之间的联系. 而且这种方法不仅适用于常系数方程和方程组, 而且适用于变系数方程. 考虑以下变系数四阶偏微分方程

$$u_t + \alpha(t)u^p u_x + \beta u_{xxxx} = 0, \tag{1}$$

其中 $u = u(x,t), \alpha(t)$ 为 $t$ 的函数, $\beta$ 为任意常数, $p = 1,2,3,\cdots$. 此类方程尤其在研究弹性梁的弯曲状况和解的稳定性中有重要的意义[11].

本文由以下几部分组成: 第 1 节求出方程 (1) 的李点对称; 第 2 节, 以 $p = 3$ 为例对方程 (1) 进行约化; 第 3 节, 结合 $(G'/G)$ 展开法[12-14], 幂级数展开法[15-16], 构造辅助方程[17-18]等方法, 对约化后的常微分方程求其精确解, 进而得到原方程的精确解; 第 4 节, 给出方程 (1) 的伴随方程和守恒律[19-21]; 第 5 节, 作简要总结.

## 1　变系数四阶微分方程的对称

设方程 (1) 的单参数向量场为

$$V = \xi(x,t,u)\frac{\partial}{\partial x} + \tau(x,t,u)\frac{\partial}{\partial t} + \phi(x,t,u)\frac{\partial}{\partial u}, \tag{2}$$

其中 $\xi(x,t,u), \tau(x,t,u), \phi(x,t,u)$ 为待定函数. 若向量场 (2) 为方程 (1) 的李点对称, 则

$$\mathrm{pr}^{(4)}V(\Delta)|_{\Delta=0} = 0, \tag{3}$$

其中 $\mathrm{pr}^{(4)}V = V + \phi^t\frac{\partial}{\partial u_t} + \phi^x\frac{\partial}{\partial u_x} + \phi^{xxxx}\frac{\partial}{\partial u_{xxxx}}$, $\Delta = u_t + \alpha(t)u^p u_x + \beta u_{xxxx}$. 必须且只需

$$\phi^t + \alpha'(t)\tau u^p u_x + p\alpha(t)u^{p-1}u_x\phi + \alpha(t)u^p\phi^x + \beta\phi^{xxxx} = 0, \tag{4}$$

其中系数函数为 $\phi^x = D_x\phi - u_x D_x\xi - u_t D_x\tau$, $\phi^t = D_t\phi - u_x D_t\xi - u_t D_t\tau$, $\phi^{xxxx} = D_x^4\phi - u_x D_x^4\xi - 4u_{xx}D_x^3\xi - 4u_{xxxx}D_x\xi - 6u_{xxx}D_x^2\xi - u_t D_x^4\tau - 4u_{xt}D_x^3\tau - 4u_{xxxt}D_x\tau - 6u_{xxt}D_x^2\tau$. 这里 $D_x, D_t$ 是全微分算子. 把这些系数函数代入式 (4), 由对称条件可以得到关于 $\xi(x,t,u), \tau(x,t,u), \phi(x,t,u)$ 的方程组

$$\begin{aligned} u_{xx}^2 &: \phi_{uu} = 0, \\ u_{xxxx} &: \tau_x = 0, \quad \Longrightarrow \tau = \tau(t), \\ &\cdots \\ u^p u_x &: p\alpha(t)C_4 + [4t\alpha'(t) + 3\alpha(t)]C_1 + \alpha'(t)C_2 = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

解以上方程组得

$$\xi = C_1 x + C_3, \quad \tau = 4C_1 t + C_2, \quad \phi = C_4 u, \tag{6}$$

其中 $C_1, C_2, C_3, C_4$ 为任意常数.

下面根据 $\alpha(t)$ 的取法不同讨论 (5), 得到方程 (1) 的生成元.

**情况 (i)**

当 $\alpha'(t)=0$ 时, 即 $\alpha(t)=k$ ($k$ 为非零常数),

$$\xi=C_1x+C_3,\quad \tau=4C_1t+C_2,\quad \phi=-\frac{3}{p}u,$$

则生成元为

$$V_1=\frac{\partial}{\partial t}+x\frac{\partial}{\partial x}-\frac{3u}{p}\frac{\partial}{\partial u},\quad V_2=\frac{\partial}{\partial t},\quad V_3=\frac{\partial}{\partial x}. \tag{7}$$

**情况 (ii)**

(1) 当 $4t\alpha'(t)+3\alpha(t)=0$ 时, 即 $\alpha(t)=kt^{-\frac{3}{4}}$ ($k$ 为非零常数),

$$\xi=C_1x+C_3,\quad \tau=4C_1t,\quad \phi=0,$$

则生成元为

$$V_1=4t\frac{\partial}{\partial t}+x\frac{\partial}{\partial x},\quad V_2=\frac{\partial}{\partial x}. \tag{8}$$

(2) 当 $4t\alpha'(t)+3\alpha(t)\neq 0$ 时, 有下列几种子情况.

(a) $\alpha'(t)=kp\alpha(t)$, 即 $\alpha(t)=l\mathrm{e}^{kpt}$ ($k$ 为非零常数),

$$\xi=C_3,\quad \tau=C_2,\quad \phi=-kC_2u,$$

则生成元为

$$V_1=\frac{\partial}{\partial t}-ku\frac{\partial}{\partial u},\quad V_2=\frac{\partial}{\partial x}. \tag{9}$$

(b) $4t\alpha'(t)+3\alpha(t)=k\alpha'(t)$, 即 $\alpha(t)=l(4t-k)^{-\frac{3}{4}}$ ($k,l$ 为非零常数),

$$\xi=C_1x+C_3,\quad \tau=4C_1t-kC_1,\quad \phi=0,$$

则生成元为

$$V_1=(4t-k)\frac{\partial}{\partial t}+x\frac{\partial}{\partial x},\quad V_2=\frac{\partial}{\partial x}. \tag{10}$$

(c) $4t\alpha'(t)+3\alpha(t)=kp\alpha(t)$, 即 $\alpha(t)=lt^{\frac{pk-3}{4}}$ ($k,l$ 为非零常数),

$$\xi=C_1x+C_3,\quad \tau=4C_1,\quad \phi=-kC_1u,$$

则生成元为

$$V_1=4t\frac{\partial}{\partial t}+x\frac{\partial}{\partial x}-k\frac{\partial}{\partial u},\quad V_2=\frac{\partial}{\partial x}. \tag{11}$$

(d) $C_1=C_2=C_4=0$, 即 $\alpha(t)$ 为关于 $t$ 的任意函数. $\xi=C_3, V=\frac{\partial}{\partial x}$.

## 2 变系数四阶微分方程的对称约化

前文中我们已经求出了方程 (1) 的李点对称,下面以 $p=3$ 为例, 对方程 (1) 进行约化.

### 2.1 情况 (i)

当 $\alpha'(t)=0$ 时, 即 $\alpha(t)=k$ ($k$ 为非零常数), 方程 (1) 退化为常系数四阶偏微分方程

$$u_t+ku^3u_x+\beta u_{xxxx}=0. \tag{12}$$

(a) 对于向量场 $V_1=\frac{\partial}{\partial t}+x\frac{\partial}{\partial x}-\frac{3u}{p}\frac{\partial}{\partial u}$, 对应的群不变解为 $u=f(\xi)t^{-\frac{1}{4}}$, 其中 $\xi=xt^{-\frac{1}{4}}$, 将其代入方程 (12), 得约化方程为

$$-\frac{1}{4}\xi f'-\frac{1}{4}f+kf^3f'+\beta f^{(4)}=0, \tag{13}$$

其中 $f'=\mathrm{d}f/\mathrm{d}\xi$.

(b) 对于向量场 $V=V_2+cV_3=\partial t+c\partial x$, 对应的群不变解为 $u=f(\xi)$, 其中 $\xi=x-ct$, 将其代入方程 (12), 得约化方程为

$$-cf'+kf^3f'+\beta f^{(4)}=0, \tag{14}$$

其中 $f'=\mathrm{d}f/\mathrm{d}\xi$.

2.2　情况 (ii)

(1) 当 $4t\alpha'(t)+3\alpha(t)=0$ 时, 即 $\alpha(t)=kt^{-\frac{3}{4}}$ ($k$ 为非零常数), 方程 (1) 变为

$$u_t+kt^{-\frac{3}{4}}u^3u_x+\beta u_{xxxx}=0. \tag{15}$$

对于向量场 $V_1=4t\partial t+x\partial x$, 对应的群不变解为 $u=f(\xi)$, 其中 $\xi=xt^{-\frac{1}{4}}$, 将其代入方程 (15), 得约化方程为

$$-\frac{1}{4}\xi f'+kf^3f+\beta f^{(4)}=0, \tag{16}$$

其中 $f'=\mathrm{d}f/\mathrm{d}\xi$.

(2) 当 $4t\alpha'(t)+3\alpha(t)\neq 0$ 时, 有下列几种子情况.

(a) $\alpha'(t)=kp\alpha(t)$, 即 $\alpha(t)=l\mathrm{e}^{kpt}$($k$ 为非零常数), 方程 (1) 变为

$$u_t+l\mathrm{e}^{3kt}u^3u_x+\beta u_{xxxx}=0. \tag{17}$$

对于向量场 $V_1=\partial t-ku\partial u$, 对应的群不变解为 $u=f(\xi)\mathrm{e}^{-kt}$, 其中 $\xi=x$, 将其代入方程 (17), 得约化方程为

$$kf+lf^3f'+\beta f^{(4)}=0, \tag{18}$$

其中 $f'=\mathrm{d}f/\mathrm{d}\xi$.

(b) $4t\alpha'(t)+3\alpha(t)=k\alpha'(t)$, 即 $\alpha(t)=l(4t-k)^{-\frac{3}{4}}$($k,l$ 为非零常数), 方程 (1) 变为

$$u_t+l(4t-k)^{-\frac{3}{4}}u^3u_x+\beta u_{xxxx}=0. \tag{19}$$

对于向量场 $V_1=(4t-k)\partial t+x\partial x$, 对应的群不变解为 $u=f(\xi)$, 其中 $\xi=x(4t-k)^{-\frac{1}{4}}$, 将其代入方程 (19), 得约化方程为

$$-\frac{1}{4}\xi f'+lf^3f+\beta f^{(4)}=0, \tag{20}$$

其中 $f'=\mathrm{d}f/\mathrm{d}\xi$. 约化后的方程 (20) 和方程 (16) 形式相同.

(c) $4t\alpha'(t)+3\alpha(t)=kp\alpha(t)$, 即 $\alpha(t)=lt^{\frac{pk-3}{4}}$ ($k,l$ 为非零常数), 方程 (1) 变为

$$u_t+lt^{\frac{3k-3}{4}}u^3u_x+\beta u_{xxxx}=0. \tag{21}$$

对于向量场 $V_1=4t\partial t+x\partial x-k\partial u$, 对应的群不变解为 $u=f(\xi)t^{-\frac{k}{4}}$, 其中 $\xi=xt^{-\frac{1}{4}}$, 将其代入方程 (21), 得约化方程为

$$-\frac{1}{4}\xi f'-\frac{k}{4}f+lf^3f+\beta f^{(4)}=0, \tag{22}$$

其中 $f'=\mathrm{d}f/\mathrm{d}\xi$.

(d) $C_1=C_2=C_4=0$ 即 $\alpha(t)$ 为关于 $t$ 的任意的函数. 方程 (1) 的群不变解为 $u=f(t)$, 将其代入方程 (1) 得 $f'(t)=0$. 易得方程 (1) 的精确解为 $u=C$, 其中 $C$ 为任意常数.

## 3 变系数四阶偏微分方程的精确解

前文中, 我们通过讨论 $\alpha(t)$ 的不同情况, 已经得到了约化方程. 本节中, 我们结合椭圆函数展开法、$(G'/G)$ 展开法及幂级数展开法等对约化后的方程 (13)、(14)、(16) 和 (18) 求其精确解, 进而得到方程 (1) 的精确解, 包括精确幂级数展开解, 椭圆函数展开解及三角函数解等.

### 3.1 方程 (13) 的精确解

对方程 (13) 积分一次, 得

$$\xi f-kf^4-4\beta f'''=A_0, \tag{23}$$

其中 $A_0$ 是积分常数. 假设方程 (23) 有以下形式的解

$$f(\xi)=\sum_{n=0}^{m}a_m(\xi)\varphi^m\ (a_1(\xi)\neq 0), \tag{24}$$

由齐次平衡原理得 $m=1$, 故方程 (24) 有以下形式的解, 且

$$f(\xi)=a_1(\xi)\varphi+a_0(\xi), \tag{25}$$

其中 $\varphi$ 是Riccati方程的已知解

$$\varphi'(\xi)=A+B\varphi(\xi)+C\varphi^2(\xi), \tag{26}$$

其中 $A=A(\xi),B=B(\xi),C=C(\xi)$.

把式 (25)、(26) 代入方程 (23) 中, 比较 $\varphi^i(i=0,1,2,3,4)$ 的同次幂系数得

$$a_1=-\sqrt[3]{\frac{24\beta}{k}}C(\xi),\quad a_0=-\sqrt[3]{\frac{24\beta}{k}}\left(\frac{B(\xi)}{2}+\frac{5C'(\xi)}{12C(\xi)}\right),\quad A_0=0.$$

当 $\lambda^2-4\mu>0$ 时, 方程 (23) 的精确解为

$$f_1(\xi)=-\sqrt[3]{\frac{24\beta}{k}}\left[\frac{\Delta_1}{2}\left(\frac{C_1\sinh\frac{1}{2}\Delta_1\xi+C_2\cosh\frac{1}{2}\Delta_1\xi}{C_1\cosh\frac{1}{2}\Delta_1\xi+C_2\sinh\frac{1}{2}\Delta_1\xi}\right)+\frac{C'}{6C}+\frac{B}{2}\right],$$

故方程 (12) 的精确解为

$$u_1(x,t)=-\sqrt[3]{\frac{24\beta}{k}}\left[\frac{\Delta_1}{2}\left(\frac{C_1\sinh\frac{1}{2}\Delta_1xt^{-\frac{1}{4}}+C_2\cosh\frac{1}{2}\Delta_1xt^{-\frac{1}{4}}}{C_1\cosh\frac{1}{2}\Delta_1xt^{-\frac{1}{4}}+C_2\sinh\frac{1}{2}\Delta_1xt^{-\frac{1}{4}}}\right)+\frac{C'}{6C}+\frac{B}{2}\right]t^{-\frac{1}{4}}.$$

其中$\Delta_1=\sqrt{\lambda^2-4\mu}$, $C_1,C_2$ 均为任意常数, $B=B(\xi),C=C(\xi)$.

当 $\lambda^2-4\mu<0$ 时, 方程 (23) 的精确解为

$$f_2(\xi)=-\sqrt[3]{\frac{24\beta}{k}}\left[\frac{\Delta_2}{2}\left(-\frac{C_1\sin\frac{1}{2}\Delta_2\xi+C_2\cos\frac{1}{2}\Delta_2\xi}{C_1\cos\frac{1}{2}\Delta_2\xi+C_2\sin\frac{1}{2}\Delta_2\xi}\right)+\frac{C'}{6C}+\frac{B}{2}\right],$$

故方程 (12) 的精确解为

$$u_2(x,t)=-\sqrt[3]{\frac{24\beta}{k}}\left[\frac{\Delta_2}{2}\left(-\frac{C_1\sin\frac{1}{2}\Delta_2xt^{-\frac{1}{4}}+C_2\cos\frac{1}{2}\Delta_2xt^{-\frac{1}{4}}}{C_1\cos\frac{1}{2}\Delta_2xt^{-\frac{1}{4}}+C_2\sin\frac{1}{2}\Delta_2xt^{-\frac{1}{4}}}\right)+\frac{C'}{6C}+\frac{B}{2}\right]t^{-\frac{1}{4}}.$$

其中 $\Delta_2=\sqrt{4\mu-\lambda^2}$, $C_1,C_2$ 均为任意常数, $B=B(\xi),C=C(\xi)$.

当 $\lambda^2-4\mu=0$ 时, 方程 (23) 的精确解为

$$f_3(\xi)=-\sqrt[3]{\frac{24\beta}{k}}\left(\frac{C_2}{C_1+C_2\xi}+\frac{C'}{6C}+\frac{B}{2}\right),$$

故方程 (12) 的精确解为

$$u_3(x,t)=-\sqrt[3]{\frac{24\beta}{k}}\left(\frac{C_2}{C_1+C_2xt^{-\frac{1}{4}}}+\frac{C'}{6C}+\frac{B}{2}\right)t^{-\frac{1}{4}},$$

其中 $C_1,C_2$ 均为任意常数, $B=B(\xi),C=C(\xi)$.

### 3.2 方程 (14) 的精确解

对方程 (14) 积分一次得

$$cf-\frac{k}{4}f^4-\beta f'''=B_0, \tag{27}$$

其中 $B_0$ 为积分常数. 假设方程 (27) 有如下形式的解

$$f(\xi)=\sum_{n=0}^{m}k_m\varphi^m, \tag{28}$$

由齐次平衡原理得 $m=1$. 故方程 (27) 有如下形式的解

$$f(\xi)=k_1\varphi+k_0, \tag{29}$$

其中 $k_1,k_0$ 为待定常数, $\varphi(\xi)$ 是Riccati方程的已知解, 且

$$\varphi'=A+B\varphi+C\varphi^2, \tag{30}$$

其中 $A$, $B$, $C$ 是常数. 把式 (29)、(30) 代入方程 (27) 中, 收集 $\varphi^i\,(i=0,1,2,3,4)$ 的各项系数, 并且令各项系数为零, 得到关于 $k_1$, $k_0$ 的代数方程组, 解方程组得

$$k_1=\sqrt[3]{\frac{24\beta}{k}}C,\quad k_0=\frac{B}{2}\sqrt[3]{\frac{24\beta}{k}}C,\quad B_0=\left(\frac{3B^4C^4\beta^2}{2k}+\frac{A^2C^2k}{2}+\frac{AkCB^2}{4}-\frac{BC}{2}\right)\sqrt[3]{\frac{24\beta}{k}}.$$

我们给出 $A$, $B$, $C$ 取特殊值时的解, 其他情况见文献 [22].

当 $A=\frac{1}{2},B=0,C=-\frac{1}{2}$ 时,

$$\varphi_1=\coth\xi\pm\mathrm{csch}\xi,\quad \varphi_2=\tanh\xi\pm\mathrm{sech}\xi,\quad \varphi_3=\frac{\tanh\xi}{1\pm\mathrm{sech}\xi},\quad \varphi_4=\frac{\coth\xi}{1\pm\mathrm{csch}\xi},$$

故方程 (27) 的解为

$$f_4(\xi)=\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{24\beta}{k}}(\coth\xi\pm\mathrm{csch}\xi),\quad f_5(\xi)=\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{24\beta}{k}}(\tanh\xi\pm\mathrm{sech}\xi),$$

$$f_6(\xi)=\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{24\beta}{k}}\Big(\frac{\tanh\xi}{1\pm\mathrm{sech}\xi}\Big),\quad f_7(\xi)=\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{24\beta}{k}}\Big(\frac{\coth\xi}{1\pm\mathrm{csch}\xi}\Big).$$

对于方程 (14) 的解

$$u_4(x,t)=\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{24\beta}{k}}[\coth(x-ct)\pm\mathrm{csch}(x-ct)],$$

借助 Maple 软件, $u_4(x,t)$ 的图像如图 1 所示.

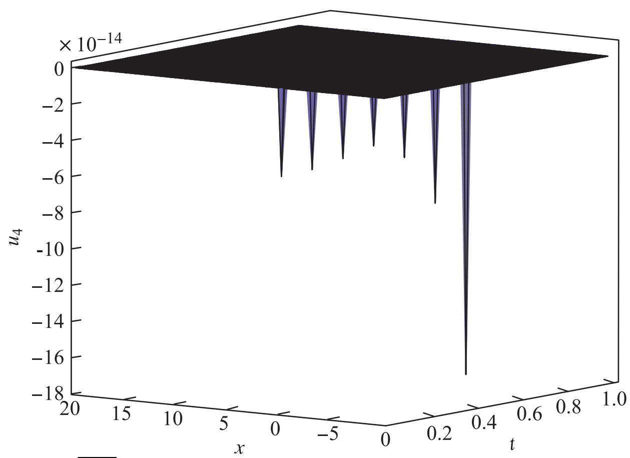


图 1　当 $\sqrt[3]{\frac{24\beta}{k}}=2,\ c=2,\ x\in[-10,20],\ t\in[0,1]$ 时, $u_4$ 为双孤子解

Fig. 1　When $\sqrt[3]{\frac{24\beta}{k}}=2,\ c=2,\ x\in[-10,20],\ t\in[0,1]$, $u_4$ is double soliton solution

对于方程 (14) 的解

$$u_5(x,t)=\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{24\beta}{k}}\left[\tanh(x-ct)\pm\mathrm{sech}(x-ct)\right],$$

$u_5(x,t)$ 的图像如图 2 所示.

对于方程 (14) 的解

$$u_6(x,t)=\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{24\beta}{k}}\left[\frac{\tanh(x-ct)}{1\pm\mathrm{sech}(x-ct)}\right],$$

$u_6(x,t)$ 的图像如图 3 所示.

对于方程 (14) 的解

$$u_7(x,t)=\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{24\beta}{k}}\left[\frac{\coth(x-ct)}{1\pm\mathrm{csch}(x-ct)}\right].$$

$u_7(x,t)$ 的图像如图 4 所示.

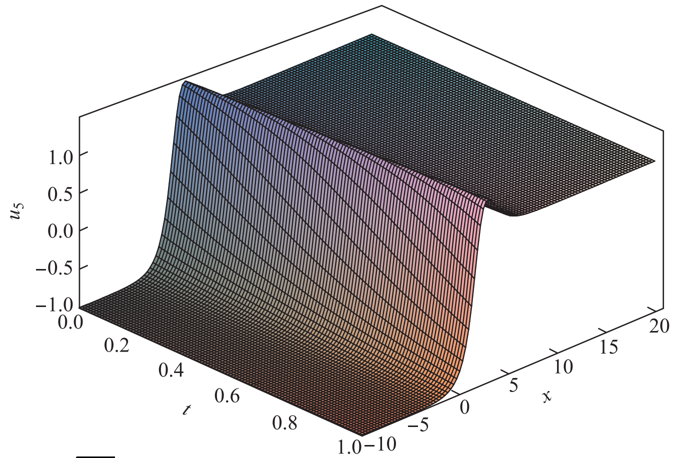


图 2 当 $\sqrt[3]{\frac{24\beta}{k}}=2$, $c=2$, $x\in[-10,20]$, $t\in[0,1]$ 时, $u_5$ 为凹尖峰孤子解

Fig. 2 When $\sqrt[3]{\frac{24\beta}{k}}=2$, $c=2$, $x\in[-10,20]$, $t\in[0,1]$, $u_5$ is concave peak soliton solution

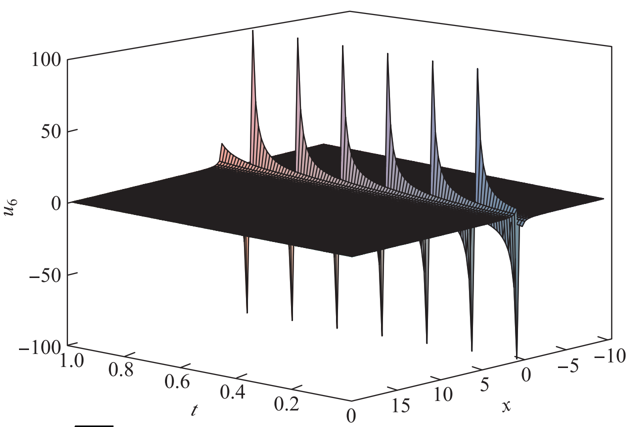


图 3 当 $\sqrt[3]{\frac{24\beta}{k}}=2$, $c=2$, $x\in[-10,20]$, $t\in[0,1]$ 时, $u_6$ 为双孤子解

Fig. 3 When $\sqrt[3]{\frac{24\beta}{k}}=2$, $c=2$, $x\in[-10,20]$, $t\in[0,1]$, $u_6$ is double soliton solution

### 3.3 方程 (16) 的幂级数解

假设方程 (16) 有如下形式的幂级数展开解

$$f(\xi)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n\varphi^n, \tag{31}$$

把式 (31) 代入方程 (16) 中, 得

$$l\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k}\sum_{m=0}^{j}(n+1-k)C_mC_{j-m}C_{k-j}C_{n-k}\right)\xi^n-\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}nC_n\xi^n+lC_0^3C_1$$
$$+24\beta C_4+\beta\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)C_{n+4}\xi^n=0, \tag{32}$$

比较式 (32) 中的系数, 可得: 当 $n=0$ 时, $C_4=-\frac{lC_0^3C_1}{24\beta}$;

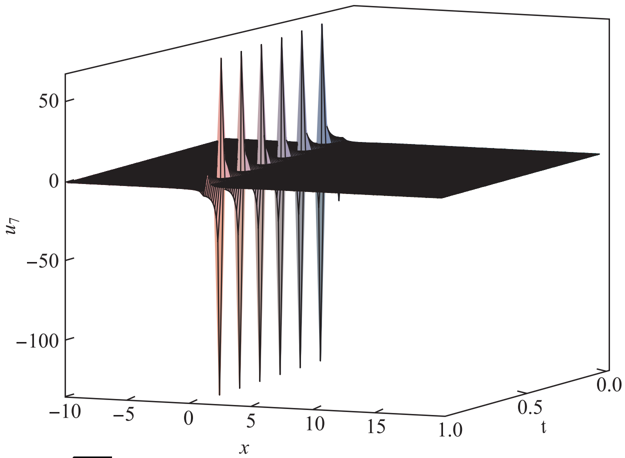


图 4 当 $\sqrt[3]{\frac{24\beta}{k}}=2,\ c=2,\ x\in[-10,20],\ t\in[0,1]$ 时, $u_7$ 为双孤子解

Fig. 4 When $\sqrt[3]{\frac{24\beta}{k}}=2,\ c=2,\ x\in[-10,20],\ t\in[0,1]$, $u_7$ is double soliton solution

当 $n\geqslant 1$ 时,

$$C_{n+4}=\frac{\frac{1}{4}nC_n-l\sum_{k=0}^{n}\sum_{j=0}^{k}\sum_{m=0}^{j}C_mC_{j-m}C_{k-j}C_{n+1-k}}{\beta(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}, \tag{33}$$

其中 $C_0,C_1,C_2,C_3$ 为任意常数. 由 (33) 式可得

$$C_5=\frac{C_1-8lC_0^3C_2+4lC_0^2C_1^2+8lC_0C^3C_1+4lC_0^2C_1C_2}{480\beta}.$$

故方程 (16) 的解为

$$f_8(\xi)=C_0+C_1\xi+C_2\xi^2+C_3\xi^3+\sum_{n=0}^{\infty}C_{n+4}\xi^{n+4},$$

因此得原方程 (15) 的精确幂级数展开解为

$$u_8(x,t)=C_0+C_1(xt^{-\frac{1}{4}})C_2(xt^{-\frac{1}{4}})^2+C_3(xt^{-\frac{1}{4}})^3+\sum_{n=0}^{\infty}C_{n+4}(xt^{-\frac{1}{4}})^{n+4},$$

其中 $C_0,C_1,C_2,C_3$ 为任意常数, $C_{n+4}$ 由 (33) 式确定.

### 3.4 方程 (18) 的精确解

假设方程 (18) 有如下形式的 $\frac{G'}{G}$ 解

$$f(\xi)=\sum_{n=0}^{m}\alpha_m\left(\frac{G'}{G}\right)^m, \tag{34}$$

其中$G=G(\xi)$, 且满足二阶线性常微分方程

$$G''+\lambda G'+\mu G=0. \tag{35}$$

由式 (34) 和 (35) 得

$$f^{(4)} = m(m+1)(m+2)(m+3)(m+4)\alpha_m \left(\frac{G'}{G}\right)^{m+4} + \cdots, \tag{36}$$

$$f^3 = \alpha_m^3 \left(\frac{G'}{G}\right)^{3m} + \cdots, \tag{37}$$

$$f' = -m\alpha_m \left(\frac{G'}{G}\right)^{m+1} + \cdots. \tag{38}$$

把式 (34)–(38) 代入方程 (18), 平衡最高阶导数项 $f^{(4)}$ 和最高阶非线性项 $f^3 f'$ 的次数, 得 $m = 1$, 故方程 (18) 有如下形式的解

$$f(\xi) = \alpha_1 \left(\frac{G'}{G}\right) + \alpha_0, \tag{39}$$

把式 (35)–(39) 代入方程 (18) 中, 且令式中 $(\frac{G'}{G})^i (i = 0,1,2,3,4,5)$ 的各项系数为零, 得到关于 $\alpha_0, \alpha_1$ 的超定方程组, 解方程组得

$$\alpha_1 = \frac{2\sqrt[3]{3\beta l^2}}{l}, \quad \alpha_0 = \frac{\lambda\sqrt[3]{3\beta l^2}}{l}.$$

当 $\lambda^2 - 4\mu > 0$ 时, 方程 (18) 的精确解为

$$f_9(\xi) = \frac{\sqrt[3]{3\beta l^2}\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{l}\left(\frac{C_1 \sinh\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2-4\mu}\xi + C_2\cosh\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2-4\mu}\xi}{C_1 \cosh\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2-4\mu}\xi + C_2\sinh\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2-4\mu}\xi}\right),$$

故方程 (17) 的精确解为

$$u_9(x,t) = \frac{\sqrt[3]{3\beta l^2}\sqrt{\lambda^2-4\mu}}{l}\left(\frac{C_1 \sinh\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2-4\mu}x + C_2\cosh\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2-4\mu}x}{C_1 \cosh\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2-4\mu}x + C_2\sinh\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2-4\mu}x}\right)\mathrm{e}^{-kt},$$

当 $\lambda^2 - 4\mu < 0$ 时, 方程 (18) 的精确解为

$$f_{10}(\xi) = \frac{\sqrt[3]{3\beta l^2}\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{l}\left(\frac{-C_1 \sin\frac{1}{2}\sqrt{4\mu-\lambda^2}\xi + C_2\cos\frac{1}{2}\sqrt{4\mu-\lambda^2}\xi}{C_1 \cos\frac{1}{2}\sqrt{4\mu-\lambda^2}\xi + C_2\sin\frac{1}{2}\sqrt{4\mu-\lambda^2}\xi}\right),$$

故方程 (17) 的精确解为

$$u_{10}(x,t) = \frac{\sqrt[3]{3\beta l^2}\sqrt{4\mu-\lambda^2}}{l}\left(\frac{-C_1 \sin\frac{1}{2}\sqrt{4\mu-\lambda^2}x + C_2\cos\frac{1}{2}\sqrt{4\mu-\lambda^2}x}{C_1 \cos\frac{1}{2}\sqrt{4\mu-\lambda^2}x + C_2\sin\frac{1}{2}\sqrt{4\mu-\lambda^2}x}\right)\mathrm{e}^{-kt},$$

当 $\lambda^2 - 4\mu = 0$ 时, 方程 (18) 的精确解为

$$f_{11}(\xi) = \frac{2\sqrt[3]{3\beta l^2}C_2}{l(C_1 + C_2\xi)},$$

故原方程 (17) 的精确解为

$$u_{11}(x,t) = \frac{2\sqrt[3]{3\beta l^2}C_2\mathrm{e}^{-kt}}{l(C_1 + C_2 x)},$$

其中 $C_1$, $C_2$ 均为常数.

## 4 变系数四阶微分方程的伴随方程和守恒律

在这一部分, 我们将给出方程 (1) 的伴随方程和守恒律.

方程 (1) 的伴随方程为

$$F^* = v_t + \alpha(t)u^p v_x - \beta v_{xxxx} = 0, \tag{40}$$

设 $v = \psi(x, t, u)$, 且 $\psi(x, t, u) \neq 0$. 根据 Ibragimov 给出的定义

$$F^* \mid_{v=\psi} = \lambda(x, t, u, \cdots)F, \tag{41}$$

其中 $F = u_t + \alpha(t)u^p u_x + \beta u_{xxxx} = 0$. 把式 (40)、(41) 入方程 (1), 得

$$\begin{aligned}
&\psi_t + \beta\psi_{xxxx} + (\psi_u + \lambda)u_t + \alpha(t)u^p\psi_x - 4\beta\psi_{uxxx}u_x - 6\beta\psi_{uuxx}u_x^2 - 6\beta\psi_{uxx}u_{xx} \\
&-4\beta\psi_{uuux}u_x^3 + 12\beta\psi_{uux}u_x u_{xx} - \beta\psi_{uuuu}u_x^4 - 6\beta\psi_{uuu}u_x^2 u_{xx} - 4\beta\psi_{ux}u_{xxx} \\
&-4\beta\psi_{uu}u_x u_{xxx} + \beta(\lambda - \psi_u)u_{xxxx} - 3\beta\psi_{uu}u_{xx}^2 + \alpha(t)\lambda u^p u_x = 0.
\end{aligned}$$

比较 $u_x, u_t, u_x^2, \cdots$ 的系数得, $\psi = \rho$, 其中 $\rho$ 为非零常数.

$$L = v(u_t + \alpha(t)u^p u_x + \beta u_{xxxx}),$$

利用 Ibragimov 给出的结论, 守恒向量为

$$\begin{aligned}
C^i =& \xi^i L + W^\alpha \left[\frac{\partial L}{\partial u_i^\alpha} - D_i D_k D_m \left(\frac{\partial L}{\partial u_{ijkm}^\alpha}\right)\right] + D_i(W^\alpha)\left[D_k D_m \left(\frac{\partial L}{\partial u_{ijkm}^\alpha}\right)\right] \\
&+ D_j D_k(W^\alpha)\left[-D_m\left(\frac{\partial L}{\partial u_{ijkm}^\alpha}\right)\right] + D_j D_k D_m(W^\alpha)\frac{\partial L}{\partial u_{ijkm}^\alpha},
\end{aligned} \tag{42}$$

其中 $W^\alpha = \eta^\alpha - \xi^j u_j^\alpha$.

根据 Ibragimov 给出的结论, 给出向量场的通式

$$V = \xi^1(x, t, u)\frac{\partial}{\partial t} + \xi^2(x, t, u)\frac{\partial}{\partial x} + \phi\frac{\partial}{\partial u},$$

那么方程 (1) 的守恒律由下式决定

$$D_t(C^1) + D_x(C^2) = 0,$$

向量场 $C = (C^1, C^2)$ 由下式决定

$$C^1 = \xi^1 L + W\left(\frac{\partial L}{\partial u_t}\right), \tag{43}$$

$$\begin{aligned}
C^2 =& \xi^2 L + W\left[\frac{\partial L}{\partial u_x} - D_{xxx}\left(\frac{\partial L}{\partial u_{xxxx}}\right)\right] + D_x(W)\left[D_{xx}\left(\frac{\partial L}{\partial u_{xxxx}}\right)\right] \\
&+ D_{xx}\left[-D_x\left(\frac{\partial L}{\partial u_{xxxx}}\right)\right] + D_{xxx}\frac{\partial L}{\partial u_{xxxx}}.
\end{aligned} \tag{44}$$

以下面情况 (i) 和情况 (ii) 为例, 可分别求出显式守恒律.

**情况 (i)**

考虑方程 (12), 对于向量场

$$V_1 = 4t\frac{\partial}{\partial t} + x\frac{\partial}{\partial x} - u\frac{\partial}{\partial u},$$

有 $W = -(u + 4tu_t + xu_x)$,

$$\begin{aligned} C^1 &= \xi^1 L + W\left(\frac{\partial L}{\partial u_t}\right) \\ &= \rho(4ktu^3u_x + 4\beta tu_{xxxx} - xu_x), \end{aligned} \tag{45}$$

$$\begin{aligned} C^2 &= \xi^2 L + W\left[\frac{\partial L}{\partial u_x} - D_{xxx}\left(\frac{\partial L}{\partial u_{xxxx}}\right)\right] + D_x(W)\left[D_{xx}\left(\frac{\partial L}{\partial u_{xxxx}}\right)\right] \\ &= \rho(xu_t - ku^4 - 4ktu^3u_t - 4\beta u_{xxx} - 4\beta tu_{xxxt}). \end{aligned} \tag{46}$$

**情况 (ii)**

考虑方程 (17), 对于向量场

$$V_1 = \frac{\partial}{\partial t} - ku\frac{\partial}{\partial u},$$

有 $W = -(ku + u_t)$,

$$\begin{aligned} C^1 &= \xi^1 L + W\left(\frac{\partial L}{\partial u_t}\right) \\ &= \rho(l\mathrm{e}^{3kt}u^3u_x + \beta u_{xxxx} - ku), \end{aligned} \tag{47}$$

$$\begin{aligned} C^2 &= \xi^2 L + W\left[\frac{\partial L}{\partial u_x} - D_{xxx}\left(\frac{\partial L}{\partial u_{xxxx}}\right)\right] + D_x(W)\left[D_{xx}\left(\frac{\partial L}{\partial u_{xxxx}}\right)\right] \\ &= -\rho(kl\mathrm{e}^{3kt}u^4 + l\mathrm{e}^{3kt}u^3u_t + k\beta u_{xxx} + \beta u_{xxxt}). \end{aligned} \tag{48}$$

以上守恒向量 $C = (C^1, C^2)$ 包含了伴随方程 (40) 的任意解 $\rho$, 因此给出了方程的无穷多个守恒律.

## 5　结　　论

本文运用李群分析研究了一类变系数四阶偏微分方程, 把复杂的偏微分方程约化成常微分方程, 通过求常微分方程的精确解, 得到原方程的精确解, 包括三角函数解, 幂级数展开解, 椭圆函数解等. 进而可以建立新解和旧解之间的关系, 能更好地解释复杂的物理现象. 李群是研究微分方程的有力工具之一, 无论是研究常系数偏微分方程还是变系数偏微分方程, 都具有广泛的应用. 另外, 我们给出了四阶变系数方程的伴随方程和显式守恒律.

## [参　考　文　献]


[1] 田畴. 李群及其在微分方程中的应用 [M]. 北京: 科学出版社, 2001.

[2] OLVER P. Applications of Lie Groups to Differential Equations [M]. New York: Springer, 1993.

[3] BLUMAN G, ANCO S. Symmetry and Integration Methods for Differential Equations [M]. New York: Springer-Verlag, 2002.

[4] HIROTA R, SATSUMA J. A variety of nonlinear network equations generated form the Bäcklund transformation for the Tota lattice [J]. Suppl Prog Theor Phys, 1976, 59: 64-100.
[5] LIU H Z, LI J B, CHEN F J. Exact periodic wave solutions for the mKdV equations [J]. Nonlinear Anal, 2009, 70: 2376-2381.
[6] WANG G W, XU T Z, LIU X Q. New explicit solutions of the fifth-order KdV equation with variable coéfficients [J]. Bull Malays Math Sci Soc 2014, 37(3): 769-778.
[7] 胡晓瑞. 非线性系统的对称性与可积性 [D]. 上海: 华东师范大学, 2012, 43-77.
[8] 刘大勇, 夏铁成. 齐次平衡法寻找Caudrey-Dodd-Gibbon-Kaeada方程的多孤子解 [J]. 应用数学和计算数学学报, 2011, 25(2): 205-212.
[9] 刘丽环, 常晶, 冯雪. 求非线性发展方程行波解的 $(G'/G)$ 展开法 [J]. 吉林大学学报 (理学版), 2013, 51(2): 183-186.
[10] 张辉群. 齐次平衡方法的扩展及应用 [J]. 数学物理学报, 2001, 21A(3): 321-325.
[11] YAO Q L. Existence, multiplicity and infinite solvability of positive solutions to a nonlinear fourth-order periodic boundary value problem [J]. Nonlinear Analysis, 2005, 63: 237-246.
[12] WANG M L, LI X Z, ZHANG J L. The $(G'/G)$-expansion method and travelling wave solutions of nonlinear evolution equations in mathematical physics [J]. Phys Lett A, 2008, 372: 417-423.
[13] 赵烨, 徐茜. 一类耦合Benjamin-Bona-Mahony型方程组的新精确解 [J]. 纯粹数学与应用数学, 2015, 31: 12-17.
[14] LI K H, LIU H Z. Lie symmetry analysis and exact solutions for nonlinear LC circuit equation [J]. Chinese Journal of Quantum Electronics, 2016, 33: 279-286.
[15] 杨春艳, 李小青. 一类四阶偏微分方程的对称分析及级数解 [J]. 纯粹数学与应用数学, 2016, 32: 432-440.
[16] 徐兰兰, 陈怀堂. 变系数 (2+1) 维 Nizhnik-Novikov-Vesselov 的三孤子新解 [J]. 物理学报, 2013, 62(9): 090204(1-6).
[17] 魏帅帅, 李凯辉, 刘汉泽. 展开法在Riccati方程中的应用 [J]. 河南科技大学学报. 2015, 36: 92-96.
[18] IBRAGIMOV N H. Integrating factors, adjoint equations and Lagrangians [J]. J Math Anal Appl, 2006, 38: 742-757.
[19] IBRAGIMOV N H. A new conservation theorem [J]. J Math Anal Appl, 2007, 333: 311-328.
[20] IBRAGIMOV N H. Nonlinear self-adjointness and conservation laws [J]. J Phys A, 2011, 44: 432002(899).
[21] ROSA R, GANDARIAS M L, BRUZON M S. Symmetries and conservation laws of a fifth- order KdV equation with time-dependent coefficients and linear damping [J]. Nonlinear Dyn, 2016, 84: 135-141.
[22] YOMBA E. On exact solutions of the coupled Klein-Gordon-Schrödinger and the complex coupled KdV equations using mapping method [J]. Chaos, Solitons and Fractals, 2004, 21: 209-229.

(责任编辑: 林　磊)

(上接第 32 页)

[6] LAINE I, YANG C C. Clunie theorems for difference and $q$-difference polynomials [J]. J Lond Math Soc, 2007, 76(3): 556-566.
[7] LAINE I. Nevanlinna Theory and Complex Differential Equations [M]. Berlin: Walter de Gruyter, 1993.
[8] CHIANG Y M, FENG S J. On the Nevanlinna characteristic of $f(z+\eta)$ and difference equations in the complex plane [J]. Ramanujan J, 2008, 16(1): 105-129.
[9] 仪洪勋, 杨重骏. 亚纯函数唯一性理论 [M]. 北京: 科学出版社, 1995.
[10] 张继龙, 杨连中. 潘勒韦III型差分方程的亚纯解 [J]. 数学学报, 2014, 57(1): 181-188.

(责任编辑: 林　磊)