文章编号: 1000-5641(2018)01-0035-15

记忆型抽象发展方程时间依赖吸引子的存在性

胡弟弟, 汪 璇

(西北师范大学 数学与统计学院, 兰州 730070)

摘要: 研究了记忆型抽象发展方程在时间依赖空间上解的长时间动力学行为. 运用修正的拉回吸引子理论, 使用先验估计技巧和算子分解的方法验证了过程的渐近紧性, 进而证明了时间依赖全局吸引子的存在性和正则性. 该结果改进了一些已有结果.

关键词: 抽象发展方程; 时间依赖吸引子; 记忆型; 存在性; 正则性

中图分类号: O175.27; O175.29 **文献标志码**: A **DOI:** 10.3969/j.issn.1000-5641.2018.01.005

The existence of time-dependent attractors for abstract evolution equations with fading memory

HU Di-di, WANG Xuan

(*College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou* 730070, *China*)

Abstract: In this paper, the long-time dynamical behavior of solutions for the abstract evolution equations with fading memory is investigated on time-dependent spaces. By applying the modified pull-back attractors theory, techniques of a priori estimate and operator decomposition, we verify the asymptotic compactness of the process. Furthermore, the existence and regularity of time-dependent global attractors are proved. This paper improves some known results.

Key words: abstract evolution equation; time-dependent attractor; fading memory; existence; regularity

0 引 言

收稿日期: 2017-01-11

基金项目: 国家自然科学基金 (11361053, 11561064, 11661071, 11761062); 甘肃省自然科学基金 (145RJZA112); 西北师范大学创新团队基金 (NWNU-LKQN-14-6)

第一作者: 胡弟弟, 女, 硕士研究生, 研究方向为无穷维动力系统及其应用.
E-mail: 2295423708@qq.com.

通信作者: 汪 璇, 女, 博士, 教授, 研究方向为非线性微分方程和无穷维动力系统.
E-mail: wangxuan@nwnu.edu.cn.

在本文中, 我们考虑边界充分光滑的有界域 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ $(n \geqslant 3)$ 上的记忆型抽象发展方程:

$$\begin{cases} \varepsilon(t)u_{tt} + k(0)A^\theta u + \int_0^\infty k'(s)A^\theta u(t-s)\mathrm{d}s + g(u) = f, & (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}, \\ u(x,t) = 0, & x \in \partial\Omega,\ t \in \mathbb{R}, \\ u(x,t) = u^\tau(x,t),\ u_t(x,t) = u_t^\tau(x,t), & x \in \Omega,\ t \leqslant \tau, \end{cases} \tag{0.1}$$

其中 $\theta \in [\frac{n}{3}, \frac{n}{2} - \frac{1}{3})$, $k(\infty) = 1$, 且 $k'(s) < 0, \forall s \in \mathbb{R}^+$, $u(x,t)$ 为未知函数. 设 $\varepsilon(t)$ 和 $g(u)$ 分别满足下列条件.

(1) $\varepsilon(t) \in C^1(\mathbb{R})$ 是单调递减的正函数, 且满足

$$\lim_{t \to +\infty} \varepsilon(t) = 0; \tag{0.2}$$

特别地, 存在常数 $L > 0$, 使得

$$\sup_{t \in \mathbb{R}}(|\varepsilon(t)| + |\varepsilon'(t)|) \leqslant L. \tag{0.3}$$

(2) 函数 $g \in C^2(\mathbb{R})$, $g(0) = 0$, 且满足:

$$|g''(y)| \leqslant C(1 + |y|), \quad \forall\, y \in \mathbb{R}; \tag{0.4}$$

$$\liminf_{|s| \to +\infty} \frac{g(s)}{s} > -\lambda_1^\theta, \tag{0.5}$$

其中 λ_1 为算子 $-\Delta$ 在空间 $H_0^1(\Omega)$ 中的第一特征值. 令

$$G(u) = \int_0^u g(y)\mathrm{d}y.$$

此外, 我们假设

$$2\langle g(u), u\rangle \geqslant 2\langle G(u), 1\rangle - (1-\nu)\|u\|_\theta^2 - C. \tag{0.6}$$

关于时间依赖吸引子, 前人在不同的方程模型上已获得一些成果. 在文献 [1-2] 中, Plinio 和 Conti 修正了拉回吸引子的经典定义, 建立了验证拉回吸引性的新方法. 在文献 [3] 中, Conti 等人研究了波方程时间依赖吸引子的渐近结构. 在文献 [4-5] 中, 刘婷婷、马巧珍等人分别关于 Plate 方程和非经典反应扩散方程得到了时间依赖全局吸引子的存在性和正则性结果.

方程 (0.1) 来源于文献 [6-8] 中建立的等温黏弹性理论, 描述了一种各向同性的黏弹性物质的能量耗散过程. 方程 (0.1) 不含时间依赖项时, 张玉宝等人在文献 [9] 中证明了弱耗散条件下强全局吸引子的存在性. 据我们所知, 方程 (0.1) 时间依赖吸引子的渐近性态尚未有人研究. 在研究过程中, 发现存在一些难以克服的本质性困难: 首先, 由于系统中正的递减函数 $\varepsilon(t)$ 在正无穷大处的值趋于零, 因此不能用经典的吸引子理论得到能量耗散估计; 其次, 方程中含有记忆项, 且 A^θ 为抽象算子, 使得过程的连续性特别是紧性 (渐近紧性) 难以验证, 成为研究瓶颈. 针对上述难点, 本文运用了先验估计和算子分解技巧, 结合修正的时间依赖吸引子理论, 成功地克服了这些困难, 并得到了时间依赖吸引子的存在性和正则性结果.

本文结构如下: 第1节, 介绍所研究问题的一些预备知识, 包括空间定义, 一些符号和一般的抽象结果; 第2节, 用先验估计和算子分解的方法证明了方程(0.1)时间依赖全局吸引子的存在性和正则性.

为了方便估计, 本文中出现的C表示正常数.

1　预备知识

设$H = L^2(\Omega)$, $\langle Au, v\rangle = b(u,v)$, $\forall u,\ v \in H$, 其中$b(u,v)$为H上的双线性型, 且是对称的和强制的, A为H上的线性无界自伴算子, 其定义域$D(A) \subset H$. 设$\{\lambda_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, $\{\omega_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ 分别为A 的特征值和特征向量, 因此$\{\omega_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ 可构成H 的一组正交基, 且有

$$\begin{cases} A\omega_j = \lambda_j\omega_j, \\ 0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_j,\ \lambda_j \to \infty\,(j \to \infty). \end{cases}$$

利用这组基定义与A同构的幂算子族A^θ, 其定义域$D(A^\theta) \subset H$. 令$D(A^0) = H$, $D(A^{\frac{\theta}{2}}) = V_\theta$, $D(A^{-\frac{\theta}{2}}) = V_\theta^*$, 其中$V_\theta = \left\{u \in H : \sum\limits_{j=1}^{\infty} \lambda_j^\theta (u,\omega_j)^2 < \infty\right\}$. 分别赋予$V_\theta$内积和范数:

$$\langle u,v\rangle_\theta = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^\theta (u,\omega_j)(v,\omega_j), \quad \|u\|_\theta^2 = \langle u,u\rangle_\theta, \quad \forall\, u,\ v \in V_\theta,$$

则其构成Hilbert空间, 且易知算子A^r为从$D(A^s)$到$D(A^{s-r})$上的同构映射(对任意的$s,\ r \in \mathbb{R}$). 由A的无界自伴性知, A^θ也为无界自伴算子. 因此, 有紧嵌入$V_\theta \hookrightarrow H$和连续嵌入

$$V_\theta \hookrightarrow L^{\frac{2n}{n-2\theta}}, \tag{1.1}$$

并且有嵌入不等式

$$\lambda_1^\theta \int_\Omega |v|^2 \mathrm{d}x \leqslant \int_\Omega |A^{\frac{\theta}{2}} v|^2 \mathrm{d}x, \quad \forall\, v \in V_\theta. \tag{1.2}$$

为便于估计, 空间H 和V_θ的内积与范数分别表示为以下形式:

$$\langle u,v\rangle = \int_\Omega u(x)v(x)\mathrm{d}x, \quad \|u\|^2 = \int_\Omega |u(x)|^2\mathrm{d}x, \quad \forall\, u,\ v \in H;$$

$$\langle u,v\rangle_\theta = \int_\Omega A^{\frac{\theta}{2}}u(x)A^{\frac{\theta}{2}}v(x)\mathrm{d}x, \quad \|u\|_\theta^2 = \int_\Omega |A^{\frac{\theta}{2}}u(x)|^2\mathrm{d}x, \quad \forall\, u,\ v \in V_\theta.$$

$L_\mu^2(\mathbb{R}^+; V_\theta)$为定义于$\mathbb{R}^+$取值于$V_\theta$的Hilbert空间族, 赋予相应的内积和范数:

$$\langle \varphi,\psi\rangle_{\mu,\theta} = \int_0^\infty \mu(s)\int_\Omega A^{\frac{\theta}{2}}\varphi A^{\frac{\theta}{2}}\psi \mathrm{d}x\mathrm{d}s, \quad \|\varphi\|_{\mu,\theta}^2 = \int_0^\infty \mu(s)\int_\Omega |A^{\frac{\theta}{2}}\varphi|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}s.$$

定义时间依赖空间族

$$\mathcal{H}_t^\sigma = V_{\theta+\sigma} \times V_\sigma \times L_\mu^2(\mathbb{R}^+; V_{\theta+\sigma}),$$

并且赋予相应的范数:

$$\|z\|_{\mathcal{H}_t^\sigma}^2 = \left\|(u,u_t,\eta^t)\right\|_{\mathcal{H}_t^\sigma}^2 = \|u\|_{\theta+\sigma}^2 + \varepsilon(t)\|u_t\|_\sigma^2 + \|\eta^t\|_{\mu,\theta+\sigma}^2.$$

当 $\sigma=0$ 时, 我们记 $\mathcal{H}_t=V_\theta\times H\times L^2_\mu(\mathbb{R}^+;V_\theta)$, 对应的范数为

$$\|z\|^2_{\mathcal{H}_t}=\left\|(u,u_t,\eta^t)\right\|^2_{\mathcal{H}_t}=\|u\|^2_\theta+\varepsilon(t)\|u_t\|^2+\|\eta^t\|^2_{\mu,\theta}.$$

定义变量

$$\eta^t(s)=\eta^t(x,s)=u(x,t)-u(x,t-s).$$

设 $\mu(s)=-k'(s)$ 且 $k(\infty)=1$, 则方程 (0.1) 转化为以下形式:

$$\begin{cases}\varepsilon(t)u_{tt}+A^\theta u+\displaystyle\int_0^\infty\mu(s)A^\theta\eta^t(s)\mathrm{d}s+g(u)=f,\\ \eta^t_t=-\eta^t_s+u_t,\end{cases}\tag{1.3}$$

相应的初-边值条件为:

$$\begin{cases}u(x,t)=0,\ \eta^t(x,s)=0, & x\in\partial\Omega,\\ u(x,\tau)=u_\tau(x),\ u_t(x,\tau)=u_{t\tau}(x), & x\in\Omega,\\ \eta^\tau(x,s)=\eta_\tau(x,s)=u(x,\tau)-u(x,\tau-s), & (x,s)\in\Omega\times\mathbb{R}^+.\end{cases}\tag{1.4}$$

对记忆核函数 $\mu(s)$ 做以下假设:

$$\mu(s)\in\mathrm{C}^1(\mathbb{R}^+)\cap L^1(\mathbb{R}^+),\quad \mu(s)\geqslant 0,\ \mu'(s)\leqslant 0,\quad \forall\, s\in\mathbb{R}^+;\tag{1.5}$$

$$\int_0^\infty\mu(s)\mathrm{d}s=k_0;\tag{1.6}$$

$$\mu'(s)+\delta\mu(s)\leqslant 0,\quad \forall\, s\in\mathbb{R}^+,\tag{1.7}$$

其中 k_0, δ 为正常数. 显然 $\mu(s)$ 沿指数衰退到零.

引理 1.1[10] 设记忆核函数$\mu(s)$满足 (1.5) 和 (1.7), 则对 $\forall T>\tau$, $\forall\,\eta^t\in C([\,\tau,T\,];L^2_\mu(\mathbb{R}^+;V_\theta))$, 有 $\langle\eta^t,\eta^t_s\rangle_{\mu,\theta}\geqslant\frac{\delta}{2}\|\eta^t\|^2_{\mu,\theta}$.

引理 1.2(Gronwall-型引理)[11] 设 $Y(t):[\tau,\infty)\to\mathbb{R}^+$ 是绝对连续函数, 且对 $\omega>0$ 和 $k\geqslant 0$ 满足微分不等式 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Y(t)+2\omega Y(t)\leqslant q(t)Y(t)+k$, 其中函数 $q(t):[\tau,\infty)\to\mathbb{R}^+$, 存在常数 $m\geqslant 0$ 满足 $\int_\tau^\infty q(y)\mathrm{d}y\leqslant m$, 则有 $Y(t)\leqslant Y(\tau)\mathrm{e}^m\mathrm{e}^{-\omega(t-\tau)}+k\omega^{-1}\mathrm{e}^m$.

2 主要结果与证明

2.1 适定性

首先, 关于方程 (1.3)–(1.4) 的弱解定义如下.

定义 2.1 记 $I=[\tau,T]$, $T>\tau$. 设 $g\in C(V_\theta;H)$, $f\in H$. 当初值 $z(\tau)=(u(\tau),u_t(\tau),\eta^\tau(s))\in\mathcal{H}_\tau$ 时, 称函数 $z(t)=(u(t),u_t(t),\eta^t(s))\in C([\tau,T];\mathcal{H}_t)$ 为方程 (1.3) 在区间 I 上的弱解, 如果

$$\begin{cases}\langle\varepsilon(t)u_{tt},v\rangle+\langle u,v\rangle_\theta+\left\langle\eta^t(s),v\right\rangle_{\mu,\theta}+\langle g(u),v\rangle=\langle f,v\rangle,\\ \langle\eta^t_t(s)+\eta^t_s(s),\varphi(s)\rangle_{\mu,\theta}=\langle u_t,\varphi(s)\rangle_{\mu,\theta}\,,\end{cases}$$

对于任意的 $v\in V_\theta$, $\varphi\in L^2_\mu(\mathbb{R}^+;V_\theta)$, $t\in I$, 几乎处处成立.

应用文献 [12-13] 中的方法, 可得到方程 (1.3)−(1.4) 解的存在唯一性.

定理 2.1　假设条件 (0.2)−(0.5) 及 (1.5)−(1.7) 成立. 如果 $f \in H$, $g \in C(V_\theta; H)$, 则对于任意给定的 $T > \tau$ 和初值 $z(\tau) = (u(\tau), u_t(\tau), \eta^\tau(s))$, 方程 (1.3)−(1.4) 存在唯一弱解 $z(t) = (u(t), u_t(t), \eta^t(s))$, 满足 $z(t) \in C([\tau, T]; \mathcal{H}_t) \cap L^\infty([\tau, T]; \mathcal{H}_t^1)$.

根据定理 2.1, 可以定义下面的过程族 $U(t,\tau) : \mathcal{H}_\tau \to \mathcal{H}_t$, 即 $U(t,\tau)z(\tau) = (u(t), u_t(t), \eta^t(s))$, 其中 $z(\tau) \in \mathcal{H}_\tau$, $z(t) = (u(t), u_t(t), \eta^t(s))$ 是方程 (1.3)−(1.4) 关于初值 $z(\tau)$ 的唯一解.

引理 2.1　假设条件 (0.2)−(0.5) 及 (1.5)−(1.7) 成立, 由定理 2.1 定义的过程族 $U(t,\tau)$, $\tau \leqslant t \in \mathbb{R}$, 满足下面的性质: 对于给定初值 $z_i(\tau) \in \mathcal{H}_\tau$, 并且 $\|z_i(\tau)\|_{\mathcal{H}_\tau} \leqslant R$, $i = 1, 2$, 那么存在常数 $C = C(R) \geqslant 0$, 使得下列估计成立

$$\|U(t,\tau)z_1(\tau) - U(t,\tau)z_2(\tau)\|_{\mathcal{H}_t} \leqslant \mathrm{e}^{C(t-\tau)}\|z_1(\tau) - z_2(\tau)\|_{\mathcal{H}_\tau}, \quad \forall\, t \geqslant \tau. \tag{2.8}$$

为了证明引理 2.1, 我们先证明下面的结论.

2.2　时间依赖吸收集

引理 2.2　在引理 2.1 的假设条件下, 设 $U(t,\tau)z(\tau)$ 是方程 (1.3) 关于初始时刻 τ 和初始值 $z(\tau)$ 的解, 则存在与 R 有关的常数 $R_0 \geqslant 0$, 使得

$$\|U(t,\tau)z(\tau)\|_{\mathcal{H}_t} \leqslant R_0, \quad \forall\, t \geqslant \tau. \tag{2.9}$$

证　明　设 $0 < \rho < 1$, 用 $2(u_t(t) + \rho u(t))$ 与方程 (1.3) 在 H 中作内积, 有

$$\begin{aligned}&\langle \varepsilon(t)u_{tt}, 2u_t + 2\rho u\rangle + \left\langle A^\theta u, 2u_t + 2\rho u\right\rangle + \left\langle \int_0^\infty \mu(s)A^\theta \eta^t(s)\mathrm{d}s, 2u_t + 2\rho u\right\rangle \\ &\quad + \langle g(u), 2u_t + 2\rho u\rangle = \langle f, 2u_t + 2\rho u\rangle.\end{aligned} \tag{2.10}$$

对于记忆项, 由方程 (1.3) 的第二个式子, 结合引理 1.1, 并利用 Hölder 不等式和 Young 不等式, 有

$$\begin{aligned}\left\langle \int_0^\infty \mu(s)A^\theta\eta^t(s)\mathrm{d}s, 2u_t\right\rangle &= \int_\Omega\int_0^\infty 2(\eta_t^t + \eta_s^t)\mu(s)A^\theta\eta^t(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}x \\ &\geqslant \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\eta^t\|_{\mu,\theta}^2 + \delta\|\eta^t\|_{\mu,\theta}^2,\end{aligned} \tag{2.11}$$

$$\begin{aligned}\left\langle \int_0^\infty \mu(s)A^\theta\eta^t(s)\mathrm{d}s, 2\rho u\right\rangle &\geqslant -2\rho\int_\Omega |A^{\frac{\theta}{2}}u|\int_0^\infty \mu(s)|A^{\frac{\theta}{2}}\eta^t(s)|\mathrm{d}s\mathrm{d}x \\ &\geqslant -\frac{\rho\nu}{2}\|u\|_\theta^2 - \frac{2k_0\rho}{\nu}\|\eta^t\|_{\mu,\theta}^2.\end{aligned} \tag{2.12}$$

对合适的常数 $\check{C} > 0$, 定义泛函

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(t) &= \|u\|_\theta^2 + \varepsilon(t)\|u_t\|^2 + \|\eta^t\|_{\mu,\theta}^2 + 2\rho\varepsilon(t)\langle u, u_t\rangle + 2\langle G(u), 1\rangle - 2\langle f, u\rangle + \check{C} \\ &= E(t) + 2\rho\varepsilon(t)\langle u, u_t\rangle + 2\langle G(u), 1\rangle - 2\langle f, u\rangle + \check{C},\end{aligned} \tag{2.13}$$

则对足够小的 ρ, 存在常数 $0 < \nu_0 < 1$ 和单调递增的正函数 $C(s)$, 使得

$$\nu_0 E(t) - C \leqslant \mathcal{E}(t) \leqslant C(E(t)). \tag{2.14}$$

事实上, 由 Hölder 不等式和 Young 不等式, 并结合条件 (0.3) 和 (1.2) 式, 有

$$2\rho\varepsilon(t)|\langle u,u_t\rangle|\leqslant\rho\varepsilon(t)\|u\|_\theta^2+\frac{\rho\varepsilon(t)}{\lambda_1^\theta}\|u_t\|^2.$$

因为 $\frac{2n}{n-2\theta}\geqslant 4$, 应用嵌入关系式 (1.1), 结合条件 (0.4) 我们有

$$\langle G(u),1\rangle\leqslant\int_\Omega\int_0^u C(1+|s|^3)\mathrm{d}s\mathrm{d}x\leqslant C\|u\|_{L^4}^4+C\leqslant C\|u\|_\theta^4+C. \tag{2.15}$$

由条件 (0.5), 存在足够小的常数 $0<\nu<1$, 使得

$$2\langle G(u),1\rangle\geqslant-(1-\nu)\|u\|_\theta^2-C.$$

对于 (2.10) 式, 由 (2.11)–(2.13) 式, 结合条件 (0.6), 可得

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{E}(t)+\rho\mathcal{E}(t)+\frac{\rho\nu}{2}\|u\|_\theta^2-(\varepsilon'(t)+3\rho\varepsilon(t))\|u_t\|^2+\Big(\delta-\frac{2k_0\rho}{\nu}-\rho\Big)\|\eta^t\|_{\mu,\theta}^2\\&\quad-2\rho(\varepsilon'(t)+\rho\varepsilon(t))\langle u,u_t\rangle\leqslant\rho C.\end{aligned} \tag{2.16}$$

由 Hölder 不等式和 Young 不等式, 并结合条件 (0.3) 和 (1.2) 式, 有

$$-2\rho(\varepsilon'(t)+\rho\varepsilon(t))\langle u,u_t\rangle\geqslant-\frac{\rho\nu}{2}\|u\|_\theta^2-\frac{2\rho}{\nu\lambda_1^\theta}L^2\|u_t\|^2. \tag{2.17}$$

将 (2.17) 式带入到 (2.16) 式, 有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{E}(t)+\rho\mathcal{E}(t)-\Big(\varepsilon'(t)+3\rho\varepsilon(t)+\frac{2\rho}{\nu\lambda_1^\theta}L^2\Big)\|u_t\|^2+\Big(\delta-\frac{2k_0\rho}{\nu}-\rho\Big)\|\eta^t\|_{\mu,\theta}^2\leqslant\rho C. \tag{2.18}$$

并取 ρ 足够小, 使得 $\varepsilon'(t)+3\rho\varepsilon(t)+\frac{2\rho}{\nu\lambda_1^\theta}L^2\leqslant 0$, $\delta-\frac{2k_0\rho}{\nu}-\rho\geqslant 0$, 则有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{E}(t)+\rho\mathcal{E}(t)\leqslant\rho C.$$

应用 Gronwall 引理并结合 (2.14) 式, 证得 (2.9) 式成立. 证毕.

引理 2.1 的证明 对于给定的初值 $z_i(\tau)$, 引理 2.2 中的能量估计保证了下面的不等式成立.

$$\|U(t,\tau)z_i(\tau)\|_{\mathcal{H}_t}\leqslant R_0. \tag{2.19}$$

定义 $\{u_i(t),\partial_t u_i(t),\eta_i^t\}=U(t,\tau)z_i(\tau)$, 并且令 $\overline{z}(t)=(\overline{u}(t),\overline{u}_t(t),\overline{\eta}^t(s))=U(t,\tau)z_1(\tau)-U(t,\tau)z_2(\tau)$. 因此, 这两个解的差 $\overline{z}(t)$ 关于初始值的差 $\overline{z}(\tau)=z_1(\tau)-z_2(\tau)$ 满足方程

$$\varepsilon(t)\overline{u}_{tt}+A^\theta\overline{u}+\int_0^\infty\mu(s)A^\theta\overline{\eta}^t(s)\mathrm{d}s+g(u_1)-g(u_2)=0. \tag{2.20}$$

用 $2\overline{u}_t(t)$ 与方程 (2.20) 在 H 中作内积, 类似于 (2.11)–(2.12) 式的计算, 有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\overline{z}\|_{\mathcal{H}_t}^2-\varepsilon'(t)\|\overline{u}_t\|^2+\delta\|\overline{\eta}^t\|_{\mu,\theta}^2\leqslant-2\langle g(u_1)-g(u_2),\overline{u}_t\rangle. \tag{2.21}$$

因为 $\frac{2n}{n-2\theta} \geqslant \frac{2n}{\theta}$, 应用嵌入关系式 (1.1), 再由 Hölder 不等式和 Young 不等式, 结合条件 (0.4) 和 (2.19) 式, 有

$$\begin{aligned}
-2\langle g(u_1)-g(u_2),\overline{u}_t\rangle \leqslant & -2\int_\Omega |g'(\xi)||\overline{u}||\overline{u}_t|\mathrm{d}x \\
\leqslant & 2C\Big(\int_\Omega (1+|u_2|^2+|u_1|^2)^{\frac{n}{\theta}}\mathrm{d}x\Big)^{\frac{\theta}{n}}\|\overline{u}\|_{L^{\frac{2n}{n-2\theta}}}\|\overline{u}_t\| \\
\leqslant & 2C(1+\|u_2\|_\theta^2+\|u_1\|_\theta^2)\|\overline{u}\|_\theta\|\overline{u}_t\| \\
\leqslant & C(\|\overline{u}\|_\theta^2+\|\overline{u}_t\|^2).
\end{aligned} \tag{2.22}$$

因此将 (2.22) 式代入到 (2.21) 式, 有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\overline{z}(t)\|^2_{\mathcal{H}_t} \leqslant C(\|\overline{u}\|_\theta^2+\|\overline{u_t}\|^2) \leqslant C\|\overline{z}(t)\|^2_{\mathcal{H}_t}.$$

在区间 $[\tau,t]$ 上利用 Gronwall 引理, 可得 (2.8) 式成立. 证毕.

记 $\mathbb{B}_t(R)=\{z(t)\in\mathcal{H}_t : \|z(t)\|_{\mathcal{H}_t}\leqslant R\}$.

引理 2.3　假设条件 (0.2)–(0.5) 及 (1.5)–(1.7) 成立, 则 $\mathfrak{B}=\{\mathbb{B}_t(R_0)\}$ 是过程 $\{U(t,\tau)\}$ 的时间依赖吸收集, 并且存在常数 $M_0\geqslant R_0^2$, 使得

$$\sup_{z_\tau\in\mathbb{B}_\tau(R_0)}\left\{\|U(t,\tau)z_\tau\|^2_{\mathcal{H}_t}+\int_\tau^\infty \|u_t(y)\|^2\mathrm{d}y\right\}\leqslant M_0,\quad \forall\, t\in\mathbb{R}. \tag{2.23}$$

证　明　由引理 2.2 直接可以得到时间依赖吸收集的存在性. 为了证明 (2.23) 式, 只需令 (2.18) 式中的 $\rho=0$, 再积分即可. 证毕.

2.3　时间依赖全局吸引子的存在性

定理 2.2　关于方程 (1.3)–(1.4) 产生的过程 $U(t,\tau)$ 在 $\mathcal{H}_t$ 中拥有一个不变的时间依赖全局吸引子 $\mathfrak{A}=\{A_t\}_{t\in\mathbb{R}}$.

为了证明过程的渐近紧性, 需要给出紧集的一个拉回吸引集族. 为此, 可以将过程分解为衰减部分和紧性部分的和.

在条件 (0.4)–(0.5) 下, 把非线性项 g 分解为 $g=g_0+g_1$, 其中 g_0, $g_1\in C^2(\mathbb{R})$, 且存在 $k\geqslant 0$ 满足

$$g_1'(s)\leqslant k,\quad \forall\, s\in\mathbb{R}, \tag{2.24}$$

$$|g_0''(s)|\leqslant k(1+|s|),\quad \forall\, s\in\mathbb{R}, \tag{2.25}$$

$$g_0(0)=g_0'(0)=0, \tag{2.26}$$

$$g_0(s)s\geqslant 0,\quad \forall\, s\in\mathbb{R}. \tag{2.27}$$

设 $\mathfrak{B}=\{\mathbb{B}_t(R_0)\}_{t\in\mathbb{R}}$ 是由引理 2.3 所得到的一个时间依赖吸收集, 且 $\tau\in\mathbb{R}$ 是固定的, 那么对任意的 $z_\tau\in\mathbb{B}_\tau(R_0)$, 可以将 $U(t,\tau)z_\tau$ 分解为

$$U(t,\tau)z_\tau=z(t)=(u(t),u_t(t),\eta^t(s))=U_0(t,\tau)z_\tau+U_1(t,\tau)z_\tau,$$

其中

$$U_0(t,\tau)z_\tau=(v(t),v_t(t),\zeta^t(s)),\quad U_1(t,\tau)z_\tau=(w(t),w_t(t),\xi^t(s)),$$

分别满足

$$\begin{cases} \varepsilon(t)v_{tt}+A^{\theta}v+\int_0^{\infty}\mu(s)A^{\theta}\zeta^t(s)\mathrm{d}s+g_0(v)=0, \\ \zeta_t^t=-\zeta_s^t+v, \\ v(x,t)|_{\partial\Omega}=0, \quad \zeta^t(x,t)|_{\partial\Omega}=0, \\ v(x,\tau)=u^{\tau}(x), \quad v_t(x,\tau)=u_t^{\tau}(x), \quad \zeta^{\tau}(x,s)=\eta^{\tau}(x,s), \end{cases} \tag{2.28}$$

和

$$\begin{cases} \varepsilon(t)w_{tt}+A^{\theta}w+\int_0^{\infty}\mu(s)A^{\theta}\xi^t(s)\mathrm{d}s+g(u)-g_0(v)=f, \\ \xi_t^t=-\xi_s^t+w, \\ w(x,t)|_{\partial\Omega}=0, \quad \xi^t(x,t)|_{\partial\Omega}=0, \\ w(x,\tau)=0, \quad w_t(x,\tau)=0, \quad \xi^{\tau}(x,s)=0. \end{cases} \tag{2.29}$$

引理 2.4 存在常数 $\alpha=\alpha(\mathfrak{B})>0$, 使得

$$\|U_0(t,\tau)z_{\tau}\|_{\mathcal{H}_t}\leqslant C\mathrm{e}^{-\alpha(t-\tau)}, \quad \forall\, t\geqslant\tau. \tag{2.30}$$

证 明 用 g_0 代替 g, 类似于引理 2.2 的证明, 有

$$\|U_0(t,\tau)z_{\tau}\|_{\mathcal{H}_t}\leqslant C. \tag{2.31}$$

设 $0<\rho<1$, 用 $2(v_t(t)+\rho v(t))$ 与方程 (2.28) 在 H 中作内积, 类似于 (2.11)–(2.12) 式的计算, 有

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|v\|_{\theta}^2+\varepsilon(t)\|v_t\|^2+\|\zeta^t\|_{\mu,\theta}^2+2\rho\varepsilon(t)\langle v,v_t\rangle+2\langle G_0(v),1\rangle)+\frac{3\rho}{2}\|v\|_{\theta}^2-(\varepsilon'(t)+2\rho\varepsilon(t))\|v_t\|^2\\&\quad+(\delta-2\rho k_0)\|\zeta^t\|_{\mu,\theta}^2-2\rho\varepsilon'(t)\langle v,v_t\rangle+2\rho\langle g_0(v),v\rangle\leqslant 0.\end{aligned} \tag{2.32}$$

由 Hölder 不等式和 Young 不等式, 并结合条件 (0.3) 和 (1.2) 式, 得到

$$-2\rho\varepsilon'(t)\langle v,v_t\rangle\geqslant-\frac{\rho}{2}\|v\|_{\theta}^2-\frac{2\rho L^2}{\lambda_1^{\theta}}\|v_t\|^2. \tag{2.33}$$

定义泛函

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_0(t)=&\|v\|_{\theta}^2+\varepsilon(t)\|v_t\|^2+\|\zeta^t\|_{\mu,\theta}^2+2\rho\varepsilon(t)\langle v,v_t\rangle+2\langle G_0(v),1\rangle\\=&\|U_0(t,\tau)z_{\tau}\|_{\mathcal{H}_t}^2+2\rho\varepsilon(t)\langle v,v_t\rangle+2\langle G_0(v),1\rangle,\end{aligned} \tag{2.34}$$

其中 $G_0(s)=\int_0^s g_0(y)\mathrm{d}y$. 从而有

$$\frac{1}{2}\|U_0(t,\tau)z_{\tau}\|_{\mathcal{H}_t}^2\leqslant\mathcal{E}_0(t)\leqslant C\|U_0(t,\tau)z_{\tau}\|_{\mathcal{H}_t}^2. \tag{2.35}$$

事实上, 由条件 (2.27), 有 $G_0(s) \geqslant 0$. 利用条件 (2.25) 和 (2.31) 式, 类似于 (2.15) 式的计算, 有

$$\langle G_0(v), 1\rangle \leqslant C\|v\|_\theta^4 + C \leqslant C.$$

由 Hölder 不等式和 Young 不等式, 并结合条件 (0.3) 和 (1.2) 式, 得到

$$2\rho\varepsilon(t)|\langle v, v_t\rangle| \leqslant \frac{1}{2}\|v\|_\theta^2 + \frac{2\rho^2 L}{\lambda_1^\theta}\varepsilon(t)\|v_t\|^2.$$

将 (2.33)–(2.34) 式代入 (2.32) 式, 利用条件 (2.27), 得到

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{E}_0(t) + \rho\|U_0(t,\tau)z_\tau\|_{\mathcal{H}_t}^2 - \left(\varepsilon'(t) + 3\rho\varepsilon(t) + \frac{2\rho L^2}{\lambda_1^\theta}\right)\|v_t\|^2 + (\delta - \rho - 2\rho k_0)\|\zeta^t\|_{\mu,\theta}^2 \leqslant C.$$

取 ρ 足够小, 使得

$$\varepsilon'(t) + 3\rho\varepsilon(t) + \frac{2\rho L^2}{\lambda_1^\theta} \leqslant 0, \quad \delta - \rho - 2\rho k_0 \geqslant 0, \tag{2.36}$$

则有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{E}_0(t) + \rho\|U_0(t,\tau)z_\tau\|_{\mathcal{H}_t}^2 \leqslant C.$$

利用 Gronwall 引理, 结合 (2.35) 式, 即得 (2.30) 式成立. 证毕.

由以上证明可知, 下面的估计式成立.

$$\sup_{t\geqslant\tau}\{\|U(t,\tau)z_\tau\|_{\mathcal{H}_t} + \|U_0(t,\tau)z_\tau\|_{\mathcal{H}_t} + \|U_1(t,\tau)z_\tau\|_{\mathcal{H}_t}\} \leqslant C. \tag{2.37}$$

引理 2.5　存在 $M = M(\mathfrak{B}) > 0$, 使得

$$\sup_{t\geqslant\tau}\|U_1(t,\tau)z_\tau\|_{\mathcal{H}_t^{1/3}} \leqslant M. \tag{2.38}$$

证　明　设 $0 < \rho < 1$, 用 $2A^{1/3}(w_t(t) + w(t))$ 与方程 (2.29) 在 H 中作内积, 类似于 (2.11)–(2.12) 式的计算, 有

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\|w\|_{\theta+1/3}^2 + \varepsilon(t)\|w_t\|_{1/3}^2 + \|\xi^t\|_{\mu,\theta+1/3}^2 + 2\rho\varepsilon(t)\left\langle w_t, A^{1/3}w\right\rangle + 2\left\langle g(u) - g_0(v) - f, A^{1/3}w\right\rangle\right)\\
&\quad + \frac{3\rho}{2}\|w\|_{\theta+1/3}^2 - (\varepsilon'(t) + 2\rho\varepsilon(t))\|w_t\|_{1/3}^2 + (\delta - 2\rho k_0)\|\xi^t\|_{\mu,\theta+\frac{1}{3}}^2 - 2\rho\varepsilon'(t)\left\langle w_t, A^{1/3}w\right\rangle\\
&\quad + 2\rho\left\langle g(u) - g_0(v) - f, A^{1/3}w\right\rangle \leqslant I_1 + I_2 + I_3,
\end{aligned} \tag{2.39}$$

其中

$$\begin{aligned}
I_1 &= 2\left\langle (g_0'(u) - g_0'(v))u_t, A^{1/3}w\right\rangle,\\
I_2 &= 2\left\langle g_0'(v)w_t, A^{1/3}w\right\rangle,\\
I_3 &= 2\left\langle g_1'(u)u_t, A^{1/3}w\right\rangle.
\end{aligned}$$

对足够小的 ρ 和合适的 $C^*>0$, 令

$$\begin{aligned}\Lambda(t)=&\|w\|_{\theta+1/3}^2+\varepsilon(t)\|w_t\|_{1/3}^2+\|\xi^t\|_{\mu,\theta+1/3}^2+2\rho\varepsilon(t)\left\langle w_t,A^{1/3}w\right\rangle\\&+2\left\langle g(u)-g_0(v)-f,A^{1/3}w\right\rangle+C^*\\=&\|U_1(t,\tau)z_\tau\|_{\mathcal{H}_t^{1/3}}^2+2\rho\varepsilon(t)\left\langle w_t,A^{1/3}w\right\rangle+2\left\langle g(u)-g_0(v)-f,A^{1/3}w\right\rangle+C^*,\end{aligned}\tag{2.40}$$

我们有

$$\frac{1}{2}\|U_1(t,\tau)z_\tau\|_{\mathcal{H}_t^{1/3}}^2\leqslant\Lambda(t)\leqslant2\|U_1(t,\tau)z_\tau\|_{\mathcal{H}_t^{1/3}}^2+C.\tag{2.41}$$

事实上, 由 Hölder 不等式和 Young 不等式, 并结合条件 (0.3) 和 (1.2) 式, 有

$$2\rho\varepsilon(t)\left|\left\langle w_t,A^{1/3}w\right\rangle\right|\leqslant\rho\|w\|_{\theta+1/3}^2+\frac{\rho L}{\lambda_1^\theta}\varepsilon(t)\|w_t\|_{1/3}^2.$$

因为 $\frac{2n}{n-2\theta}\geqslant\frac{2n}{\theta}$, 应用嵌入关系式 (1.1), 由条件 (0.4) 和 (2.24), 结合 (2.37) 式, 并运用 Hölder 不等式和 Young 不等式, 有

$$\begin{aligned}2\left|\left\langle g(u)-g_0(v),A^{1/3}w\right\rangle\right|\leqslant&2\left|\left\langle g(u)-g(v),A^{1/3}w\right\rangle\right|+2\left|\left\langle g_1(v),A^{1/3}w\right\rangle\right|\\\leqslant&2\int_\Omega|g'(\xi)||w||A^{1/3}w|\mathrm{d}x+2\int_\Omega|g_1'(\xi)||v||A^{1/3}w|\mathrm{d}x\\\leqslant&C\Big(\int_\Omega(1+|u|^2+|v|^2)^{\frac{n}{\theta}}\mathrm{d}x\Big)^{\frac{\theta}{n}}\|w\|_{L^{\frac{2n}{n-2\theta}}}\|A^{1/3}w\|+2k\|v\|\|A^{1/3}w\|\\\leqslant&C\|w\|_\theta\|w\|_{2/3}+C\|v\|_\theta\|w\|_{2/3}\\\leqslant&\frac{1}{4}\|w\|_{\theta+1/3}^2+C.\end{aligned}$$

将 (2.40) 式代入到 (2.39) 式, 有

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Lambda(t)+\rho\Lambda(t)+\frac{\rho}{2}\|w\|_{\theta+1/3}^2-(\varepsilon'(t)+3\rho\varepsilon(t))\|w_t\|_{1/3}^2+(\delta-\rho-2\rho k_0)\|\xi^t\|_{\mu,\theta+1/3}^2\\&\quad-2\rho(\varepsilon'(t)+\rho\varepsilon(t))\left\langle w_t,A^{1/3}w\right\rangle\leqslant I_1+I_2+I_3+\rho C^*.\end{aligned}\tag{2.42}$$

由 Hölder 不等式和 Young 不等式, 并结合条件 (0.3) 和 (1.2) 式, 得到

$$-2\rho(\varepsilon'(t)+\rho\varepsilon(t))\left\langle w_t,A^{1/3}w\right\rangle\geqslant-\frac{\rho}{2}\|w\|_{\theta+1/3}^2-\frac{2\rho L^2}{\lambda_1^\theta}\|w_t\|^2.\tag{2.43}$$

将 (2.43) 式代入到 (2.42) 式, 并取 ρ 足够小, 使得 (2.36) 式成立, 则有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Lambda(t)+\rho\Lambda(t)\leqslant I_1+I_2+I_3+\rho C^*.\tag{2.44}$$

因为 $\frac{2n}{n-2\theta}\geqslant\frac{2n}{4\theta-n}$, $\frac{2n}{n-2\theta}\geqslant\frac{2n}{\theta}$, 应用嵌入关系式 (1.1), 再由 Hölder 不等式和 Young 不等式, 结

合条件 (2.25)–(2.26), 有

$$\begin{aligned}
I_1 \leqslant & C(1+\|u\|_{L^{\frac{2n}{4\theta-n}}}+\|v\|_{L^{\frac{2n}{4\theta-n}}})\|u_t\|\|w\|_{L^{\frac{2n}{n-2(\theta+1/3)}}}\|A^{1/3}w\|_{L^{\frac{2n}{n-2(\theta-1/3)}}}\\
\leqslant & C(1+\|u\|_\theta+\|v\|_\theta)\|u_t\|\|w\|_{\theta+1/3}\|A^{1/3}w\|_{\theta-1/3}\\
\leqslant & \frac{\rho}{2}\|w\|^2_{\theta+1/3}+C\|u_t\|^2\|w\|^2_{\theta+1/3}\\
\leqslant & \frac{\rho}{2}\Lambda(t)+C\|u_t\|^2\|w\|^2_{\theta+1/3},\\
I_2 \leqslant & C\Big(\int_\Omega(|v|+|v|^2)^{\frac{n}{\theta}}\mathrm{d}x\Big)^{\frac{\theta}{n}}\|w_t\|_{1/3}\|A^{1/3}w\|_{L^{\frac{2n}{n-2(\theta-1/3)}}}\\
\leqslant & C(1+\|v\|_\theta+\|v\|^2_\theta)\|w_t\|_{1/3}\|w\|_{\theta+1/3}\\
\leqslant & C\|w_t\|^2_{1/3}+C\|v\|^2_\theta\|w\|^2_{\theta+1/3}.
\end{aligned}$$

此外, 由条件 (2.24), 有

$$I_3 \leqslant k\|u_t\|\|A^{1/3}w\| \leqslant \lambda_1^{2(\theta-1/3)}\|u_t\|^2\|w\|^2_{2/3}+C \leqslant \|u_t\|^2\|w\|^2_{\theta+1/3}+C.$$

因此, 由不等式 (2.44), 可得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Lambda(t)+\frac{\rho}{2}\Lambda(t)\leqslant q(t)\Lambda(t)+C,$$

其中 $q(t)=C\|u_t\|^2+C\|v\|^2_\theta$, 满足

$$\int_\tau^\infty q(y)\mathrm{d}y\leqslant C.$$

并且由引理 1.2, 引理 2.3 和引理 2.4, 得到

$$\Lambda(t)\leqslant C\Lambda(\tau)\mathrm{e}^{-\frac{\rho}{4}(t-\tau)}+C, \tag{2.45}$$

再结合 (2.41) 式, 证明了 $U_1(t,\tau)z(\tau)$ 在空间 $\mathcal{H}_t^{1/3}$ 中的有界性. 证毕.

为了构造紧集的一个拉回吸引集, 我们还需要记忆项的紧性.

引理 2.6[12-14]　假定 $\mu(s)\in C^1(\mathbb{R}^+)\cap L^1(\mathbb{R}^+)$ 是一个非负函数, 且满足以下条件: 如果存在 $s_0\in\mathbb{R}^+$, 使得 $\mu(s_0)=0$, 那么对所有的 $s\geqslant s_0$, 有 $\mu(s_0)=0$. 进一步, 设 B_0, B_1, B_2 是 Banach 空间, B_0, B_1 是自反的, 且满足 $B_0\hookrightarrow B_1\hookrightarrow B_2$, 其中嵌入 $B_0\hookrightarrow B_1$ 是紧的. 设 $C\subset L^2_\mu(\mathbb{R}^+;B_1)$ 满足

(i) $C\subset L^2_\mu(\mathbb{R}^+;B_0)\cap H^1_\mu(\mathbb{R}^+;B_2)$;

(ii) $\sup_{\eta\in C}\|\eta(s)\|^2_{B_1}\leqslant h(s)$, $\forall s\in\mathbb{R}^+$, $h(s)\in L^1_\mu(\mathbb{R}^+)$.

那么 C 在空间 $L^2_\mu(\mathbb{R}^+;B_1)$ 中是相对紧的.

另外, 对任意的 $\xi^t\in L^2_\mu(\mathbb{R}^+;V_\theta)$, Cauchy 问题

$$\begin{cases}\xi^t_t=-\xi^t_s+w_t, & t\geqslant\tau,\\ \xi^\tau=\xi_\tau\end{cases} \tag{2.46}$$

有唯一解 $\xi^t\in C([\tau,\infty);L^2_\mu(\mathbb{R}^+;V_\theta))$, 因此对方程 (2.29), 有

$$\xi^t(x,s)=\begin{cases}w(x,t)-w(x,t-s), & \tau<s<t,\\ w(x,t)-w(\tau), & s\geqslant t.\end{cases} \tag{2.47}$$

设 $\mathfrak{B}$ 是引理 2.3 中得到的一个时间依赖吸收集, 那么有以下结论.

引理 2.7[15] 假定非线性项 g 满足条件 (0.4)−(0.5), 外力项 $f \in H$, 且条件 (1.5) 和 (1.7) 成立. 对任意给定的 $T > \tau$ 和任意的 $\epsilon > 0$, 令

$$\mathcal{K}_T = \Pi U_1(T,\tau)\mathfrak{B},$$

则存在一个正常数 $N_1 = N_1(\|\mathfrak{B}\|_{\mathcal{H}_t})$, 使得

(i) $\mathcal{K}_T$ 在空间 $L^2_\mu(\mathbb{R}^+; V_{\theta+1/3}) \cap H^1_\mu(\mathbb{R}^+; V_\theta)$ 中有界;

(ii) $\sup_{\xi \in \mathcal{K}_T^\epsilon} \|\xi(s)\|^2_\theta \leqslant N_1$.

其中 $\{U_1(T,\tau)\}_{t\geqslant\tau}$ 是方程 (2.29) 的解过程, $\Pi : V_\theta \times H \times L^2_\mu(\mathbb{R}^+; V_\theta) \to L^2_\mu(\mathbb{R}^+; V_\theta)$ 为投影算子.

引理 2.8 在引理 2.6 的条件下, 令 $\{U_1(t,\tau)\}_{t\geqslant\tau}$ 是方程 (2.29) 的解过程, 则对任意的 $T > \tau$, $U_1(t,\tau)\mathfrak{B}$ 在 $\mathcal{H}_t$ 中是相对紧的.

根据引理 2.5 和引理 2.8, 可以考虑 $\mathcal{K} = \{K_t\}_{t\in\mathbb{R}}$, 其中

$$K_t = \left\{ z(t) \in \mathcal{H}_t^{1/3} : \|z(t)\|_{\mathcal{H}_t^{1/3}} \leqslant M \right\}.$$

由此可知 K_t 是紧的. 此外, 由于常数 M 与 t 无关, 因此 $\mathcal{K}$ 是一致有界的. 最后, 根据引理 2.2, 引理 2.4, 引理 2.5 和引理 2.8, 就可证得 $\mathcal{K}$ 是拉回吸引的. 事实上

$$\mathrm{dist}(U(t,\tau)\mathbb{B}_\tau(R_0), K_t) \leqslant C\mathrm{e}^{-\alpha(t-\tau)}, \quad \forall\, t \geqslant \tau,$$

其中 $\mathrm{dist}(B,C)$ 是两个非空集合 B, C 的 Hausdorff 半距离. 因此, 过程 $U(t,\tau)$ 是渐近紧的, 这就证明了 $U(t,\tau)$ 的时间依赖全局吸引子 $\mathfrak{A} = \{A_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 的存在性. 最后, 由过程 $U(t,\tau)_{t\geqslant\tau}$ 的强连续性, 我们就能得到 $\mathfrak{A}$ 的不变性.

2.4 时间依赖吸引子的正则性

在 $\mathcal{K}$ 中, 对所有的 $t \in \mathbb{R}$, $\mathfrak{A}$ 的最小性就保证了 $A_t \subset K_t$, 从而 A_t 在 $\mathcal{H}_t^{1/3}$ 上是有界的, 且其界与 t 无关. 此外, 我们还能得到下面的正则性结论.

定理 2.3 A_t 在 $\mathcal{H}_t^1$ 中有界, 且其界与 t 无关.

为了证明 A_t 在 $\mathcal{H}_t^1$ 上的有界性, 我们参照定理 2.2, 固定 $\tau \in \mathbb{R}$, 对 $z_\tau \in A_t$, 我们将 $U(t,\tau)z_\tau$ 分解为

$$U(t,\tau)z_\tau = z(t) = (u(t), u_t(t), \eta^t(s)) = U_3(t,\tau)z_\tau + U_4(t,\tau)z_\tau,$$

其中

$$U_3(t,\tau)z_\tau = (v(t), v_t(t), \zeta^t(s)), \quad U_4(t,\tau)z_\tau = (w(t), w_t(t), \xi^t(s)),$$

分别满足

$$\begin{cases} \varepsilon(t)v_{tt} + A^\theta v + \int_0^\infty \mu(s)A^\theta\zeta^t(s)\mathrm{d}s = 0, \\ \zeta^t_t = -\zeta^t_s + v, \\ v(x,t)|_{\partial\Omega} = 0, \quad \zeta^t(x,t)|_{\partial\Omega} = 0, \\ v(x,\tau) = u^\tau(x), \quad v_t(x,\tau) = u^\tau_t(x), \quad \zeta^\tau(x,s) = \eta^\tau(x,s), \end{cases} \tag{2.48}$$

和

$$\begin{cases} \varepsilon(t)w_{tt}+A^{\theta}w+\int_0^{\infty}\mu(s)A^{\theta}\xi^t(s)\mathrm{d}s+g(u)=f, \\ \xi_t^t=-\xi_s^t+w, \\ w(x,t)|_{\partial\Omega=0}, \quad \xi^t(x,t)|_{\partial\Omega}=0, \\ w(x,\tau)=0, \quad w_t(x,\tau)=0, \quad \xi^{\tau}(x,s)=0. \end{cases} \tag{2.49}$$

作为引理 2.4 的一个特例, 我们可以得到

$$\|U_3(t,\tau)z_\tau\|_{\mathcal{H}_t}\leqslant C\mathrm{e}^{-\alpha(t-\tau)}, \quad \forall\, t\geqslant\tau. \tag{2.50}$$

引理 2.9　存在常数 $M_1=M_1(\mathfrak{A})>0$, 使得

$$\sup_{t\geqslant\tau}\|U_4(t,\tau)z_\tau\|_{\mathcal{H}_t^1}\leqslant M_1. \tag{2.51}$$

证　明　设 $0<\rho<1$, 用 $2A(w_t(t)+\rho w(t))$ 与方程 (2.49) 在 H 中作内积, 类似于 (2.11)–(2.12) 式的计算, 有

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\|w\|_{\theta+1}^2+\varepsilon(t)\|w_t\|_1^2+\|\xi\|_{\mu,\theta+1}^2+2\rho\varepsilon(t)\left\langle w_t,Aw\right\rangle-2\langle f,Aw\rangle) \\ &\quad+\frac{3}{2}\rho\|w\|_{\theta+1}^2-(\varepsilon'(t)+2\rho\varepsilon(t))\|w_t\|_1^2+(\delta-2\rho k_0)\|\xi^t\|_{\mu,\theta+1}^2 \\ &\quad-2\rho\varepsilon'(t)\left\langle w_t,Aw\right\rangle-2\rho\langle f,Aw\rangle\leqslant-2\left\langle g(u),A(w_t+\rho w)\right\rangle. \end{aligned} \tag{2.52}$$

对足够小的 ρ 和合适的 $\widetilde{C}>0$ (依赖于 $\|g\|$), 令

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1(t)=&\|w\|_{\theta+1}^2+\varepsilon(t)\|w_t\|_1^2+\|\xi\|_{\mu,\theta+1}^2+2\rho\varepsilon(t)\left\langle w_t,Aw\right\rangle-2\langle f,Aw\rangle+\widetilde{C} \\ =&\|U_4(t,\tau)z_\tau\|_{\mathcal{H}_t^1}^2+2\rho\varepsilon(t)\left\langle w_t,Aw\right\rangle-2\langle f,Aw\rangle+\widetilde{C}, \end{aligned} \tag{2.53}$$

我们有

$$\frac{1}{4}\|U_4(t,\tau)z_\tau\|_{\mathcal{H}_t^1}^2\leqslant\mathcal{E}_1(t)\leqslant2\|U_4(t,\tau)z\|_{\mathcal{H}_t^1}^2+C. \tag{2.54}$$

将 (2.53) 式代入到 (2.52) 式, 有

$$\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{E}_1(t)+\rho\mathcal{E}_1(t)+\frac{1}{2}\rho\|w\|_{\theta+1}^2-(\varepsilon'(t)+3\rho\varepsilon(t))\|w_t\|_1^2+(\delta-\rho-2\rho k_0)\|\xi\|_{\mu,\theta+1}^2 \\ &\quad-2\rho(\varepsilon'(t)+\rho\varepsilon(t))\langle w_t,Aw\rangle\leqslant-2\left\langle g(u),A(w_t+\rho w)\right\rangle+\rho\widetilde{C}, \end{aligned} \tag{2.55}$$

由 Hölder 不等式和 Young 不等式, 并结合条件 (0.3) 和 (1.2) 式, 得到

$$-2\rho(\varepsilon'(t)+\rho\varepsilon(t))\left\langle w_t,Aw\right\rangle\geqslant-\frac{\rho}{2}\|w\|_{\theta+1}^2-\frac{2\rho L^2}{\lambda_1^{\theta}}\|w_t\|_1^2. \tag{2.56}$$

将 (2.56) 式代入 (2.55) 式, 并取 ρ 足够小, 使得 (2.36) 式成立, 则有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{E}_1(t)+\rho\mathcal{E}_1(t)\leqslant-2\left\langle g(u),A(w_t+\rho w)\right\rangle+\rho\widetilde{C}. \tag{2.57}$$

由吸引子的不变性, 可得

$$\|U(t,\tau)z_\tau\|_{\mathcal{H}_t^{1/3}}\leqslant C,$$

其中 $C>0$ 是在 $\mathcal{H}_t^{1/3}$ 中与 A_t 的界有关的常数. 因为 $\frac{2n}{4(\theta+1/3)-n}\leqslant\frac{2n}{n-2(\theta-2/3)}$, 从而应用嵌入关系式 (1.1), 有 $V_{\theta-2/3}\hookrightarrow L^{\frac{2n}{n-2(\theta-2/3)}}\hookrightarrow L^{\frac{2n}{4(\theta+1/3)-n}}$, 结合条件 (0.4) 和 (2.25), 有

$$\begin{aligned}
-2\langle g(u),Aw_t\rangle-2\rho\langle g(u),Aw\rangle\leqslant&2\int_\Omega|g'(u)||A^{1/2}u||A^{1/2}w_t|\mathrm{d}x+2\int_\Omega|g'(u)||A^{1/2}u||A^{1/2}w|\mathrm{d}x\\
\leqslant&C\Big(\int_\Omega(1+|u|^2)^{\frac{n}{n-2(\theta+1/3)}}\mathrm{d}x\Big)^{\frac{n-2(\theta+1/3)}{n}}\\
&\times\|A^{1/2}u\|_{L^{\frac{2n}{4(\theta+1/3)-n}}}(\|w_t\|_1+\|w\|_1)\\
\leqslant&C\Big(1+\|u\|^2_{L^{\frac{2n}{n-2(\theta+1/3)}}}\Big)\|A^{1/2}u\|_{\theta-2/3}(\|w_t\|_1+\|w\|_1)\\
\leqslant&C(1+\|u\|^2_{\theta+1/3})\|u\|_{\theta+1/3}(\|w_t\|_1+\|w\|_1)\\
\leqslant&\frac{\rho}{2}\mathcal{E}_1(t)+C.
\end{aligned}\tag{2.58}$$

将 (2.58) 式代入 (2.57) 式, 有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{E}_1(t)+\frac{\rho}{2}\mathcal{E}_1(t)\leqslant C.$$

应用 Gronwall 引理, 结合 (2.53) 式, 可得 $\|U_4(t,\tau)z_\tau\|_{\mathcal{H}_t^1}$ 的一致有界性.

定理 2.3 的证明 令

$$K_t^1=\Big\{z(t)\in\mathcal{H}_t^1:\|z(t)\|_{\mathcal{H}_t^1}\leqslant M_1\Big\}.$$

由不等式 (2.50) 和引理 2.9, 对 $\forall t\in\mathbb{R}$, 有

$$\lim_{\tau\to-\infty}\mathrm{dist}(U(t,\tau)A_\tau,K_t^1)=0.$$

从而由 $\mathfrak{A}$ 的不变性, 有

$$\mathrm{dist}(A_t,K_t^1)=0.$$

因此, $A_t\subset\overline{K_t^1}=K_t^1$, 即证明了 A_t 在 $\mathcal{H}_t^1$ 中是有界的, 并且其界与 $t\in\mathbb{R}$ 无关.

[参 考 文 献]

[1] DI PLINIO F, DUANE G S, TEMAM R. Time-dependent attractor for the oscillation equation [J]. Discrete and Continuous Dynamical Systems, 2010, 29(1): 141-167.

[2] CONTI M, PATA V, TEMAM R. Attractors for processes on time-dependent spaces and applications to wave equation [J]. Journal of Differential Equations, 2013, 255(255): 1254-1277.

[3] CONTI M, PATA V. Asymptotic structure of the attractor for processes on time-dependent spaces [J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2014, 19(1): 1-10.

[4] 刘亭亭, 马巧珍. Plate 方程时间依赖全局吸引子的存在性 [J]. 华东师范大学学报 (自然科学版), 2016(2): 35-44.

[5] MA Q Z, WANG X P, XU L. Existence and regularity of time-dependent global attractos for the nonclassical reaction-diffusion equations with lower forcing term [J]. Boundary Value Problems, 2016(1): 1-11.
[6] COLEMAN B D, NOLL W. Foundations of linear viscoelasticity [J]. Reviews of Modern Physics, 1961, 33(2): 239-249.
[7] DAFERMOS C M. Asymptotic stability in viscoelasticity [J]. Archive for Rational Mechanics and Analysis, 1970, 37(4): 297-308.
[8] FABRIZIO M, MORRO A. Mathematical Problems in Linear Viscoelasticity [M]. Pennsylvania: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1992.
[9] 张玉宝, 汪璇. 无阻尼弱耗散抽象发展方程的强全局吸引子 [J]. 华东师范大学学报 (自然科学版), 2017(2): 8-19.
[10] WANG X, YANG L, ZHONG C K. Attractors for the nonclassical diffusion equations with fading memory [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2010, 362(2): 327-337.
[11] CONTI M, PATA V. Weakly dissipative semilinear equations of viscoelasticity [J]. Communications on Pure and Applied Analysis, 2005, 4(4): 705-720.
[12] PATA V, ZUCCHI A. Attractors for a damped hyperbolic equation with linear memory [J]. Advances in Mathematical Sciences and Applications, 2001, 11(2): 505-529.
[13] BORINI S, PATA V. Uniform attractors for a strongly damped wave equations with linear memory [J]. Asymptotic Analysis, 1999, 20(3): 263-277.
[14] GATTI S, MIRANVILLE A, PATA V, et al. Attractors for semilinear equations of viscoelasticity with very low dissipation [J]. Rocky Mountain Journal of Mathematics, 2008, 38(4): 1117-1138.
[15] 汪璇, 段奋霞. 记忆型抽象发展方程全局吸引子的存在性 [J]. 兰州大学学报 (自然科学版), 2016, 52(4): 523-529.

(责任编辑: 林　磊)

(上接第 34 页)

[参　考　文　献]

[1] FAN S J, XIAO L S, WANG Y B. Multidimensional BSDEs with uniformly continuous generators in general time intervals[J]. Bulletin of the Korean Mathematical Society, 2015, 52(2): 483-504.
[2] PARDOUX E, PENG S G. Adapted solution of a backward stochastic differential equation[J]. Systems Control Letters, 1990, 14(1): 55-61.
[3] El KAROUI N, PENG S G, QUENEZ M C. Backward stochastic differential equations in finance[J]. Mathmatical Finance, 1997, 7(3): 1-72.
[4] PARDOUX E. BSDEs, weak convergence and homogenization of semilinear PDEs[M]//Nonlinear Analysis, Differential Equations and Control. Berlin: Springer, 1999: 503-549.
[5] FAN S J, JIANG L. Multidimensional BSDEs with weakly monotonic generators[J]. Acta Mathematica Sinica, 2013, 23(10): 1885-1906.
[6] HAMADÈNE S. Multidimensional backward stochastic differential equations with uniformly continuous coefficients[J]. Bernoulli, 2003, 9(3): 517-534.
[7] FAN S J, JIANG L, DAVISION M. Uniqueness of solutions for multidimensional BSDEs with uniformly continuous generators[J]. C R Acad Sci Paris (Ser I), 2010, 348(11/12): 683-686.
[8] El KAROUI N, PENG S G, QUENEZ M C. Backward stochastic differential equations in finance[J]. Mathematical Finance, 1997, 7(1): 1-71.
[9] XIAO L S, FAN S J, XU N. $L^p(p \geqslant 1)$ solutions of multidimensional BSDEs with monotone generators in general time intervals[J]. Stochastics and Dynamics, 2015, 15(1): 1550002(34 pages).
[10] CHEN Z J, WANG B. Infinite time interval BSDEs and the convergence of g-martingales[J]. Journal of the Australian Mathematical Society (Ser A), 2000, 69(2): 187-211.

(责任编辑: 林　磊)