文章编号: 1000-5641(2018)02-0031-10

左拟中插式Gamma算子在Orlicz空间中的逼近性质

韩领兄

(内蒙古民族大学 数学学院, 内蒙古 通辽 028043)

摘要: 为了得到更快的逼近速度, 人们开始研究算子的拟中插式的逼近性质. 在Orlicz空间中讨论左拟中插式Gamma算子的逼近性质, 利用了Ditzian-Totik 模与K-泛函的等价性、Hölder不等式、Cauchy-Schwarz不等式和Laguerre多项式等等工具得到了逼近的正、逆和等价定理, 推广了左拟中插式Gamma算子在L_p空间中的逼近结果, 改进了Gamma算子在Orlicz空间的逼近性质.

关键词: 左拟中插式Gamma算子; K-泛函; 连续模; 等价定理

中图分类号: O174.41 **文献标志码**: A **DOI:** 10.3969/j.issn.1000-5641.2018.02.004

Approximation properties of the left quasi-interpolants Gamma operators in Orlicz spaces

HAN Ling-xiong

(*College of Mathematics, Inner Mongolia University for the Nationalities, Tongliao Inner Mongolia* 028043, *China*)

Abstract: In order to reach better approximation degree, people start to study the quasi-interpolants of operators. In this paper, approximation properties of left quasi-interpolants Gamma operators are discussed by the tools of Ditizan-Totik modulus, K-functional, Hölder's inequality, Cauchy-Schwarz's inequality and Laguerre polynomials and so on. Then we obtain the direct, inverse and equivalence theorems which generalize the results of left quasi-interpolants Gamma operators in L_p space and improve the approximation properties of Gamma operators in Orlicz spaces.

Key words: left quasi-interpolants Gamma operator; K-functional; modulus of smoothness; equivalence theorem

收稿日期: 2017-03-22

基金项目: 国家自然科学基金(11461052); 内蒙古自治区自然科学基金(2016MS0118); 内蒙古民族大学科学研究项目(NMDYB15087)

作者简介: 韩领兄, 女, 副教授, 研究方向为函数逼近论. E-mail: hlx2980@163.com.

0 引 言

近年来人们对 Orlicz 空间感兴趣, 因为 L_p 空间提供的活动天地和度量标准只适合于处理线性的和充其量是多项式型的非线性问题. 随着越来越多非线性问题的出现, 从 L_p 空间过渡到 Orlicz 空间已成为历史的必然, 这正是研究 Orlicz 空间的意义所在. 下面介绍 Orlicz 空间 $L_\Phi^*(0,\infty)$ (见文献 [1]).

定义 0.1 设 $\Phi(t)$ 为定义在区间 $(0,\infty)$ 上的凸连续函数, 若 $\Phi(t)$ 满足

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{\Phi(t)}{t}=0,\quad \lim_{t\to\infty}\frac{\Phi(t)}{t}=\infty.$$

则称 $\Phi(t)$ 为 Young 函数.

Young 函数 $\Phi(t)$ 的互余 Young 函数记为 $\Psi(t)$. 由 Young 函数 $\Phi(t)$ 的凸性得到

$$\Phi(\alpha t)\leqslant\alpha\Phi(t),\alpha\in(0,1],$$
$$\Phi(\alpha t)>\alpha\Phi(t),\alpha\in(1,\infty).$$

定义 0.2 设 $\Phi(t)$ 为 Young 函数. 若存在常数 $t_0>0$ 和 $C\geqslant 1$, 使得当 $t\geqslant t_0$ 时, 有

$$\Phi(2t)\leqslant C\Phi(t),$$

则称 Young 函数 $\Phi(t)$ 满足 Δ_2-条件 (记为 $\Phi\in\Delta_2$).

定义 0.3 设 $\Phi(t)$ 为 Young 函数. Orlicz 类 $L_\Phi(0,\infty)$ 为使有限积分

$$\rho(u,\Phi)=\int_0^\infty\Phi(|u(x)|)\mathrm{d}x$$

存在的在区间 $(0,\infty)$ 上可测的函数 $u(x)$ 的全体. Orlicz 空间 $L_\Phi^*(0,\infty)$ 为赋予 Luxemburg 范数

$$\|u\|_{(\Phi)}=\inf_{\lambda>0}\left\{\frac{1}{\lambda}:\rho(\lambda u,\Phi)\leqslant 1\right\}$$

的 Orlicz 类 $L_\Phi(0,\infty)$ 的线性包. 有如下性质.

(1) Orlicz 空间 $L_\Phi^*(0,\infty)$ 是 Banach 空间且成立如下的 Hölder 不等式

$$\left|\int_0^\infty u(x)v(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant 2\|u\|_{(\Phi)}\|v\|_{(\Psi)}.$$

(2) $L_\Phi^*(0,\infty)$ 空间的 Orlicz 范数定义为

$$\|u\|_\Phi=\sup_{\rho(v,\Psi)\leqslant 1}\left|\int_0^\infty u(x)v(x)\mathrm{d}x\right|,$$

它与 Luxemburg 范数等价, 即

$$\|u\|_{(\Phi)}\leqslant\|u\|_\Phi\leqslant 2\|u\|_{(\Phi)}.\tag{0.1}$$

对于 $f\in L_\Phi^*(0,\infty)$, 加权函数 $\varphi(x)=x$ 的 K-泛函与 Ditzian-Totik 模的定义[2]为

$$K_{r,\varphi}(f,t^r)_\Phi=\inf_g\{\|f-g\|_\Phi+t^r\|\varphi^r g^{(r)}\|_\Phi:g^{(r-1)}\in A.C._{loc}\},$$
$$\omega_{r,\varphi}(f,t)_\Phi=\sup_{0<h\leqslant t}\|\Delta_{h\varphi}^r f\|_\Phi.$$

我们在文献 [2] 中得到了如下的连续模与 K-泛函的等价性定理.

定理 0.1[2]　设 $f \in L^*_\Phi(0,\infty)$, 则存在常数 C 和 t_0, 使得当 $0<t\leqslant t_0$ 时, 有

$$C^{-1}\omega_{r,\varphi}(f,t)_\Phi \leqslant K_{r,\varphi}(f,t^r)_\Phi \leqslant C\omega_{r,\varphi}(f,t)_\Phi. \tag{0.2}$$

本文中 C 表示正常数, 不同的场合其值有所不同.

Orlicz 空间 $L^*_\Phi(0,\infty)$ 具有 Hardy-Littlewood 性质[3]. 对于函数 $f \in L^*_\Phi(0,\infty)$ 的 Hardy-Littlewood 函数为

$$\theta(f,x)=\sup_{0<y<\infty,y\neq x}\frac{1}{y-x}\int_x^y f(t)\mathrm{d}t.$$

如果 $f\in L^*_\Phi(0,\infty)$ 时总有 $\theta(f,x)\in L^*_\Phi(0,\infty)$，则称 $L^*_\Phi(0,\infty)$ 具有 Hardy-Littlewood 性质 (简记为 $L^*_\Phi(0,\infty)$ ∈HLP). 由文献 [3] 的性质 2.1、性质 2.2 直接得到下面的性质.

性质 0.1　对于 $f\in L^*_\Phi(0,\infty)$, 若 $\Psi\in\Delta_2$, 则 Orlicz 空间 $L^*_\Phi(0,\infty)$ ∈HLP, 且

$$\|\theta(f)\|_\Phi \leqslant C\|f\|_\Phi. \tag{0.3}$$

Gamma 算子 G_n 有两种定义. 设 $f(x)$ 为 $(0,\infty)$ 上的可积函数, 则

$$G_n(f;x)=\int_0^\infty g_n(x,t)f\Big(\frac{n}{t}\Big)\mathrm{d}t,$$

其中 $g_n(x,t)=\frac{x^{n+1}}{n!}\mathrm{e}^{-xt}t^n, x\in(0,\infty)$.

另一种定义为：

$$G_n(f;x)=\frac{1}{n!}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^n f\Big(\frac{nx}{t}\Big)\mathrm{d}t, x\in(0,\infty).$$

Müller 在文献 [4] 中介绍过这些 Gamma 算子. 随后在文献 [2-3, 5-13] 中研究了 Gamma 算子的逼近性质. 我们在文献 [2-3] 中分别研究了 Gamma 算子在 Orlicz 空间 $L^*_\Phi(0,\infty)$ 中同时逼近的强逆不等式和加 Jacobi 权同时逼近的强逆不等式, 得到如下结果.

定理 A[2]　设 $f\in L^*_\Phi(0,\infty)$, $n>1$, $\Psi\in\Delta_2$, $\varphi(x)=x$, 则存在常数 $K>1$, 当 $l\leqslant Kn$ 时, 有

$$\omega^2_\varphi\Big(f,\frac{1}{n}\Big)_\Phi \leqslant C\frac{l}{n}\Big(\|G_nf-f\|_\Phi+\|G_lf-f\|_\Phi\Big),$$

其中 C 是与 n 和 x 无关的正常数.

定理 B[3]　设 $wf^{(s)}\in L^*_\Phi(0,\infty)$, $s\in\mathbf{N}$, $n>s+1$, $a\geqslant s-2$, $a+b\geqslant s-2$, $\Psi\in\Delta_2$, 则存在常数 $K>1$, 当 $l\geqslant Kn$ 时, 有

$$K^2_\varphi\Big(f^{(s)},\frac{1}{n}\Big)_{w,\Phi} \leqslant C\frac{l}{n}\Big(\|w(G^{(s)}_nf-f^{(s)})\|_\Phi+\|w(G^{(s)}_lf-f^{(s)})\|_\Phi\Big),$$

其中 $\varphi(x)=x$, $w(x)=x^a(1+x)^b$.

为了得到更好的逼近性质, Sablonnière 在文献 [14] 中引进了一类所谓的拟中插式算子. 从而开始研究算子的拟中插式的逼近性质. 设 Π_n 表示次数至多为 n 的多项式空间, 若 $\mathbb{B}_n$ 和 $\mathbb{A}_n=\mathbb{B}_n^{-1}$ 是 Π_n 中的线性自同构算子, 并且能够表示成带有多项式系数的微分算子形式 $\mathbb{B}_n=\sum\limits_{k=0}^n\beta^n_kD^k$ 和 $\mathbb{A}_n=\sum\limits_{k=0}^n\alpha^n_kD^k$. 这里 $D=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$, $D^0=\mathrm{id}$, 则一类拟中插式算子定义如下

$$\mathbb{B}^{(r)}_n=\mathbb{A}^{(r)}_n\circ\mathbb{B}_n,\quad 0\leqslant r\leqslant n,$$

这里 $\mathbb{A}_n^{(r)}=\sum\limits_{k=0}^{n}\alpha_k^n D^k$. 通常在 Π_n 上 $\mathbb{B}_n^{(0)}=\mathbb{B}_n$, $\mathbb{B}_n^{(n)}=\mathrm{id}$. 进而还有, 当 $0\leqslant r\leqslant n$ 时, 对于所有的 $P\in\Pi_n$, 有 $\mathbb{B}_n^{(r)}P=P$.

对于 $f\in L_\Phi^*(0,\infty)$, 左拟中插式 Gamma 算子为

$$G_n^{(k)}(f):=\mathbb{A}_n^{(k)}G_n(f)=\sum_{j=0}^{k}\alpha_j^n D^j G_n f=\sum_{j=0}^{k}\alpha_j^n (G_n f)^{(j)},$$

其中 α_j^n 为 Laguerre 多项式. 显然 $G_n^{(0)}=G_n$, $G_n^{(n)}=\mathrm{id}$, 对于 $P\in\Pi_n$, 有 $G_n^{(k)}(P)=P$, $0\leqslant k\leqslant n$.

Müller 在文献 [15] 中给出了左拟中插式 Gamma 算子, 且在 L_p 空间中研究了其逼近性质. 我们在文献 [16] 中研究了拟中插式 Bernstein-Durrmeyer 算子在 Orlicz 空间 $L_M^*[0,1]$ 中的逼近性质, 并得到了等价定理. 在文献 [2-3, 16] 的研究基础上, 本文继续在由 Young 函数构成的 Orlicz 空间 $L_\Phi^*(0,\infty)$ 中研究左拟中插式 Gamma 算子的逼近性质, 并得到了正定理、逆定理和等价定理.

1 正定理

为了证明正定理, 需要给出下面几个引理.

引理 1.1[15] 对于 $j\in\mathbf{N}_0$, $n\geqslant j$, $x\in(0,\infty)$ 有

$$\alpha_j^n=\alpha_j^n(x)=\left(\frac{x}{n}\right)^j L_j^{(n-j)}(n), \tag{1.1}$$

其中 $L_j^{(\alpha)}(x)=\sum_{r=0}^{j}(-1)^r\binom{j+\alpha}{j-r}\frac{x^r}{r!}=\frac{(\alpha+1)_j}{j!}\sum_{r=0}^{j}(-1)^r\binom{j}{r}\frac{x^r}{(\alpha+1)_r}$ 为 j 阶 Laguerre 多项式且对于 $a\in\mathbf{R}$, $(a)_j:=a(a+1)\cdots(a+j-1)$. 特别 $\alpha_0^n=1,\alpha_1^n=0$. 并且有

$$\left|\frac{1}{n^j}L_j^{(n-j)}(n)\right|\leqslant Cn^{-\frac{j}{2}}, \tag{1.2}$$

其中 C 为只与 j 有关的正常数.

引理 1.2[15] 对于 $m,n,l\in\mathbf{N}_0$, $n\geqslant m$, $x\in(0,\infty)$, 定义

$$T_{m,n,l}(x):=\frac{1}{(n+l)!}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{n+1}\left(\frac{nx}{t}-x\right)^m\mathrm{d}t$$

则

$$0\leqslant T_{m,n,l}(x)\leqslant C\frac{x^m}{n^{[\frac{m+1}{2}]}}, \tag{1.3}$$

其中 C 为只与 m 有关的正常数.

引理 1.3[3] 设 $\int_0^\infty\Psi\Big(|v(x)|\Big)\mathrm{d}x\leqslant\frac{n}{t}$, 则存在常数 $C\leqslant 1$, 使得

$$\|v\|_\Psi\leqslant C\frac{n}{t}.$$

引理 1.4 对于 $k\in\mathbf{N}_0$, $n\geqslant\max\{2,k\}$, $f\in L_\Phi^*(0,\infty)$, $\varphi(x)=x$, 有

$$\|G_n^{(k)}f\|_\Phi\leqslant C\|f\|_\Phi.$$

证 明 由文献 [2] 知

$$\|G_n f\|_\Phi \leqslant 2\|f\|_\Phi. \tag{1.4}$$

利用式 (1.1)、(1.2) 和 (1.4), 得到

$$\begin{aligned}\|G_n^{(k)} f\|_\Phi &\leqslant \|G_n f\|_\Phi + \sum_{j=2}^{k}\Big|\frac{1}{n^j}L_j^{(n-j)}(n)\Big|\cdot\big\|\varphi^j(G_n f)^{(j)}\big\|_\Phi \\ &\leqslant 2\|f\|_\Phi + \sum_{j=2}^{k} C n^{-\frac{j}{2}}\big\|\varphi^j(G_n f)^{(j)}\big\|_\Phi. \end{aligned}\tag{1.5}$$

所以只需估计 $\big\|\varphi^j(G_n f)^{(j)}\big\|_\Phi$. 由文献 [6] 知

$$\frac{\partial^k}{\partial x^k} g_n(x,t) = \frac{k!}{x^k} g_n(x,t) L_k^{(n+1-k)}(xt), \tag{1.6}$$

且

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^a |L_k^{(a)}(t)|^2 \mathrm{d}x = \frac{\Gamma(k+a+1)}{k!}, a > -1. \tag{1.7}$$

利用引理 1.3, 式 (0.1)、(1.6)、(1.7), Hölder 不等式和 Cauchy-Schwarz 不等式得到

$$\begin{aligned}\|\varphi^j(G_n f)^{(j)}\|_\Phi &= \sup_{\rho(v,\Psi)\leqslant 1}\Big|\int_0^\infty\Big(\varphi^j(x)\int_0^\infty \frac{\partial^j}{\partial x^j}g_n(x,u) f\Big(\frac{n}{u}\Big)\mathrm{d}u\Big)v(x)\mathrm{d}x\Big| \\ &= \sup_{\rho(v,\Psi)\leqslant 1}\Big|\int_0^\infty \frac{1}{n!}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^n L_j^{(n+1-j)}(t) f\Big(\frac{nx}{t}\Big)\mathrm{d}t v(x)\mathrm{d}x\Big| \\ &\leqslant \frac{1}{n!}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^n |L_j^{(n+1-j)}(t)| \sup_{\rho(v,\Psi)\leqslant \frac{n}{t}} \|f\|_{(\Phi)}\|v\|_\Psi \frac{t}{n}\mathrm{d}t \\ &\leqslant \frac{\|f\|_\Phi}{n!}\int_0^\infty \Big(\mathrm{e}^{-t}t^{n+1-j}\Big)^{\frac12}|L_j^{(n+1-j)}(t)|\Big(\mathrm{e}^{-t}t^{n+1-j}\Big)^{\frac12} t^{j-1}\mathrm{d}t \\ &\leqslant \frac{\|f\|_\Phi}{n!}\Big(\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{n+1-j}|L_j^{(n+1-j)}(t)|^2\mathrm{d}t\Big)^{\frac12}\Big(\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{n+1-j}t^{2j-2}\mathrm{d}t\Big)^{\frac12} \\ &= \frac{\|f\|_\Phi}{\sqrt{j!}}(n+1)n^{\frac{j}{2}-1}\sqrt{\prod_{i=2}^{j-1}\Big(1+\frac{i}{n}\Big)} \leqslant C n^{\frac{j}{2}}\|f\|_\Phi. \end{aligned}\tag{1.8}$$

结合式 (1.5) 和式 (1.8) 就能得到

$$\|G_n^{(k)} f\|_\Phi \leqslant C\|f\|_\Phi.$$

定理 1.1(正定理) 对于 $n \geqslant 4r$, $f \in L_\Phi^*(0,\infty)$, 有

$$\|G_n^{(2r-1)} f - f\|_\Phi \leqslant C\omega_{2r,\varphi}(f, n^{-\frac12})_\Phi,$$

其中 C 为只与 r 有关的正常数.

证 明 设 $W_\Phi^{2r} = \big\{g : g^{(2r-1)} \in A.C._{loc}, \varphi^{2r}g^{(2r)} \in L_\Phi^*(0,\infty)\big\}$, 则对于 $g \in W_\Phi^{2r}$ 用泰勒公式展开得

$$g(t) = \sum_{j=0}^{2r-1}\frac{1}{j!}(t-x)^j g^{(j)}(x) + R_{2r}(g,t,x),$$

其中 $R_{2r}(g,t,x)=\frac{1}{(2r-1)!}\int_x^t(t-u)^{2r-1}g^{(2r)}(u)\mathrm{d}u,\ x,t\in(0,\infty)$. 注意到左拟中插式 Gamma 算子的定义, 式 (1.2) 及 $\alpha_0^n=1$, $\alpha_1^n=0$, 就能得到

$$G_n^{(2r-1)}(g,x)-g(x)=G_n^{(2r-1)}\big(R_{2r}(g,t,x);x\big),$$

且

$$\begin{aligned}\big\|G_n^{(2r-1)}g-g\big\|_\Phi&=\Big\|\sum_{j=0}^{2r-1}\alpha_j^nD^jG_n\big(R_{2r}(g,\cdot,x);x\big)\Big\|_\Phi\\&\leqslant\Big\|G_n\big(R_{2r}(g,\cdot,x);x\big)\Big\|_\Phi+C\sum_{j=2}^{2r-1}n^{-\frac{j}{2}}\Big\|\varphi^j(x)D^jG_n\big(R_{2r}(g,\cdot,x);x\big)\Big\|_\Phi.\end{aligned}\tag{1.9}$$

先估计 $\|G_n\big(R_{2r}(g,\cdot,x);x\big)\|_\Phi$. 由文献 [11] 知当 u 在 x 与 t 之间时有不等式

$$\frac{|t-u|}{\varphi(u)}\leqslant\frac{|t-x|}{\varphi(x)},$$

且

$$\frac{1}{u}\leqslant\frac{1}{x}+\frac{1}{t}.$$

从而有

$$\begin{aligned}|R_{2r}(g,t,x)|&=\frac{1}{(2r-1)!}\Big|\int_x^t(t-u)^{2r-1}g^{(2r)}(u)\mathrm{d}u\Big|\\&=\frac{1}{(2r-1)!}\Big|\int_x^t\Big(\frac{t-u}{\varphi(u)}\Big)^{2r-1}\cdot\frac{1}{u}\varphi^{2r}(u)g^{(2r)}(u)\mathrm{d}u\Big|\\&\leqslant\frac{1}{(2r-1)!}\cdot\frac{|t-x|^{2r-1}}{\varphi^{2r-1}(x)}\Big(\frac{1}{x}+\frac{1}{t}\Big)\Big|\int_x^t\varphi^{2r}(u)g^{(2r)}(u)\mathrm{d}u\Big|\\&\leqslant\frac{1}{(2r-1)!}\cdot\frac{(t-x)^{2r}}{\varphi^{2r-1}(x)}\Big(\frac{1}{x}+\frac{1}{t}\Big)|\theta(\varphi^{2r}g^{(2r)},x)|.\end{aligned}\tag{1.10}$$

设 $T_{m,n}(x):=G_n\big((t-x)^m,x\big)$, 则由文献 [6] 知

$$T_{m,n}(x)\leqslant\frac{Cx^m}{n^{[\frac{m+1}{2}]}},\tag{1.11}$$

其中 C 为只与 m 有关的正常数. 利用式 (1.11), Cauchy-Schwarz 不等式和 $G_n(t^{-2},x)\leqslant Cx^{-2}$, 得到

$$\begin{aligned}&|G_n(R_{2r}(g,t,x);x)|\leqslant G_n(|R_{2r}(g,t,x)|;x)\\&\leqslant\frac{1}{(2r-1)!}\Big|\theta(\varphi^{2r}g^{(2r)},x)\Big|\Big[\frac{1}{x^{2r}}T_{2r,n}(x)+\frac{1}{x^{2r-1}}G_n\Big(\frac{(t-x)^{2r}}{t},x\Big)\Big]\\&\leqslant\frac{1}{(2r-1)!}\Big|\theta(\varphi^{2r}g^{(2r)},x)\Big|\Big[\frac{1}{x^{2r}}\cdot\frac{Cx^{2r}}{n^r}+\frac{1}{x^{2r-1}}(Cn^{-2r}x^{4r})^{\frac{1}{2}}(G_n(t^{-2},x))^{\frac{1}{2}}\Big]\\&\leqslant Cn^{-r}\Big|\theta(\varphi^{2r}g^{(2r)},x)\Big|.\end{aligned}\tag{1.12}$$

再由式 (0.1), 式 (0.3) 和式 (1.12) 得

$$\begin{aligned}\|G_n(R_{2r}(g,t,x);x)\|_\Phi &\leqslant 2\inf_{\lambda>0}\Big\{\lambda:\int_0^\infty \Phi\Big(\Big|\frac{Cn^{-r}\theta(\varphi^{2r}g^{(2r)},x)}{\lambda}\Big|\Big)\mathrm{d}x\leqslant 1\Big\}\\ &\leqslant Cn^{-r}\|\theta(\varphi^{2r}g^{(2r)})\|_{(\Phi)}\leqslant Cn^{-r}\|\theta(\varphi^{2r}g^{(2r)})\|_\Phi\leqslant Cn^{-r}\|\varphi^{2r}g^{(2r)}\|_\Phi. \qquad (1.13)\end{aligned}$$

再估计 $\big\|\varphi^j(x)D^jG_n\big(R_{2r}(g,\cdot,x);x\big)\big\|_\Phi$. 利用式 (1.6) 可以得到

$$\begin{aligned}\big|\varphi^j(x)D^jG_n\big(R_{2r}(g,\cdot,x);x\big)\big| &= \frac{j!}{n!}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^n|L_j^{(n+1-j)}(t)|\Big|R_{2r}\Big(g,\frac{nx}{t},x\Big)\Big|\mathrm{d}t\\ &\leqslant \frac{j!}{n!(2r-1)!}|\theta(\varphi^{2r}g^{(2r)},x)|\Big(\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^n|L_j^{(n+1-j)}(t)|\frac{(\frac{nx}{t}-x)^{2r}}{x^{2r}}\mathrm{d}t\\ &\quad+\frac{1}{n}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{n+1}|L_j^{(n+1-j)}(t)|\frac{(\frac{nx}{t}-x)^{2r}}{x^{2r}}\mathrm{d}t\Big)\\ &:= \frac{j!}{n!(2r-1)!}|\theta(\varphi^{2r}g^{(2r)},x)|\big(I_1(x)+I_2(x)\big). \qquad (1.14)\end{aligned}$$

由 Cauchy-Schwarz 不等式, 式 (1.3), 式 (1.7), 得

$$\begin{aligned}I_1(x) &= \frac{1}{x^{2r}}\cdot\frac{1}{n!}\int_0^\infty(\mathrm{e}^{-t}t^{n+j-1})^{\frac12}\Big(\frac{nx}{t}-x\Big)^{2r}(\mathrm{e}^{-t}t^{n+1-j})^{\frac12}|L_j^{(n+1-j)}(t)|\mathrm{d}t\\ &\leqslant \frac{1}{x^{2r}}\Big(\frac{1}{n!}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{n+j-1}\Big(\frac{nx}{t}-x\Big)^{4r}\mathrm{d}t\Big)^{\frac12}\Big(\frac{1}{n!}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{n+1-j}|L_j^{(n+1-j)}(t)|^2\mathrm{d}t\Big)^{\frac12}\\ &\leqslant \frac{1}{x^{2r}}\Big(\frac{(n+j-1)!}{n!}T_{4r,n,j-1}(x)\Big)^{\frac12}\Big(\frac{n+1}{j!}\Big)^{\frac12}\leqslant Cn^{-r+\frac{j}{2}}. \qquad (1.15)\end{aligned}$$

同理可得

$$I_2(x)\leqslant Cn^{-r+\frac{j}{2}}. \qquad (1.16)$$

结合式 (0.3), 式 (1.9), 式 (1.13)—(1.16), 得到

$$\|G_n^{(2r-1)}g-g\|_\Phi\leqslant Cn^{-r}\|\varphi^{2r}g^{(2r)}\|_\Phi. \qquad (1.17)$$

对于任何 $g\in W_\Phi^{2r}$, 由引理 1.4, 式 (1.17)、(0.2) 得

$$\begin{aligned}\|G_n^{(2r-1)}f-f\|_\Phi &\leqslant \|G_n^{(2r-1)}(f-g)-(f-g)\|_\Phi+\|G_n^{(2r-1)}g-g\|_\Phi\\ &\leqslant C(\|f-g\|_\Phi+n^{-r}\|\varphi^{2r}g^{(2r)}\|_\Phi)\leqslant C\omega_{2r,\varphi}(f,n^{-\frac12})_\Phi.\end{aligned}$$

2 等价定理

引理 2.1 设 $r,m\in\mathbf{N}_0$, $\varphi(x)=x$, $I=(0,\infty)$, $U:=U_p^{2r}(\varphi,I):=\{g:g^{(2r-1)}\in A.C._{loc}(I)$, $g^{(2r)},\varphi^{2r}g^{(2r)}\in L_\Phi^*(I)\}$ 为 $L_\Phi^*(I)$ 的一个线性流形, 则对于 $f\in U$, $n\geqslant 2r+m$, 有

$$\|\varphi^{2r+m}(G_nf)^{(2r+m)}\|_\Phi\leqslant Cn^{\frac{m}{2}}\|\varphi^{2r}f^{(2r)}\|_\Phi, \qquad (2.1)$$

其中 C 为只与 r, m 有关的正常数.

证 明 当 $m=0$ 时由式 (1.8) 知式 (2.1) 成立. 当 $m>0$ 时, 由文献 [15] 知

$$(G_nf)^{(2r)}(x)=\frac{n^{2r}}{n!}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{n-2r}f^{(2r)}\Big(\frac{nx}{t}\Big)\mathrm{d}t=\frac{n^{2r}(n-2r)!}{n!}\int_0^\infty g_{n-2r}(x,u)f^{(2r)}\Big(\frac{n}{u}\Big)\mathrm{d}u.$$

对于 $x\in(0,\infty)$, $n\geqslant 2r+m$, 由式 (1.6) 得

$$\begin{aligned}[(G_nf)^{(2r)}]^{(m)}(x)&=\frac{n^{2r}(n-2r)!}{n!}\int_0^\infty \frac{\partial^m}{\partial x^m}g_{n-2r}(x,u)f^{(2r)}\Big(\frac{n}{u}\Big)\mathrm{d}u\\&=\frac{n^{2r}(n-2r)!}{n!}\cdot\frac{m!}{x^m}\int_0^\infty g_{n-2r}(x,u)L_m^{(n-2r+1-m)}(xu)f^{(2r)}\Big(\frac{n}{u}\Big)\mathrm{d}u\\&=\frac{m!}{n!x^{2r+m}}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^nL_m^{(n-2r+1-m)}(t)\Big(\frac{nx}{t}\Big)^{2r}f^{(2r)}\Big(\frac{nx}{t}\Big)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

利用 Hölder 不等式, 引理 1.3 及 Cauchy-Schwarz 不等式, 得

$$\begin{aligned}&\|\varphi^{2r+m}(G_nf)^{(2r+m)}\|_\Phi\\&=\sup_{\rho(v,\Psi)\leqslant1}\Big|\int_0^\infty\frac{m!}{n!}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^nL_m^{(n-2r+1-m)}(t)\Big(\frac{nx}{t}\Big)^{2r}f^{(2r)}\Big(\frac{nx}{t}\Big)\mathrm{d}tv(x)\mathrm{d}x\Big|\\&\leqslant\frac{m!}{n!}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^n|L_m^{(n-2r+1-m)}(t)|\mathrm{d}t\sup_{\rho(v,\Psi)\leqslant1}\Big|\int_0^\infty\Big(\frac{nx}{t}\Big)^{2r}f^{(2r)}\Big(\frac{nx}{t}\Big)v(x)\mathrm{d}x\Big|\\&=\frac{m!}{n!}\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^n\frac{t}{n}|L_m^{(n-2r+1-m)}(t)|\mathrm{d}t\sup_{\rho(v,\Psi)\leqslant\frac{n}{t}}\Big|\int_0^\infty\varphi^{2r}(u)f^{(2r)}(u)v(u)\mathrm{d}u\Big|\\&\leqslant\frac{m!}{n!}\|\varphi^{2r}f^{(2r)}\|_\Phi\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^n|L_m^{(n-2r+1-m)}(t)|\mathrm{d}t\\&=\frac{m!}{n!}\|\varphi^{2r}f^{(2r)}\|_\Phi\Big(\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{n-2r+1-m}|L_m^{(n-2r+1-m)}(t)|^2\mathrm{d}t\Big)^{\frac12}\Big(\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{n+2r-1+m}\mathrm{d}t\Big)^{\frac12}\\&=\frac{m!}{n!}\|\varphi^{2r}f^{(2r)}\|_\Phi\Big[\frac{(n-2r+1)!}{m!}\Big]^{\frac12}\Big[(n+2r+m-1)!\Big]^{\frac12}\\&\leqslant Cn^{\frac{m}{2}}\|\varphi^{2r}f^{(2r)}\|_\Phi.\end{aligned}$$

引理 2.2 对于 $\varphi(x)=x$, $n\geqslant 4r$, 有

$$\|\varphi^{2r}(G_n^{(2r-1)}f)^{(2r)}\|_\Phi\leqslant Cn^r\|f\|_\Phi,\quad f\in L_\Phi^*(0,\infty),\tag{2.2}$$

$$\|\varphi^{2r}(G_n^{(2r-1)}f)^{(2r)}\|_\Phi\leqslant C\|\varphi^{2r}f^{(2r)}\|_\Phi,\quad f\in U.\tag{2.3}$$

证 明 先证式 (2.2). 由式 (1.2) 和式 (1.8) 得

$$\begin{aligned}\|\varphi^{2r}(G_n^{(2r-1)}f)^{(2r)}\|_\Phi&=\Big\|\varphi^{2r}\Big(\sum_{j=0}^{2r-1}\frac{1}{n^j}L_j^{(n-j)}(n)\varphi^j(G_nf)^{(j)}\Big)^{(2r)}\Big\|_\Phi\\&=\Big\|\varphi^{2r}(G_nf)^{(2r)}+\sum_{j=2}^{2r-1}\frac{1}{n^j}L_j^{(n-j)}(n)\varphi^{2r}\sum_{k=0}^{j}\binom{2r}{k}k!\binom{j}{k}\varphi^{j-k}(G_nf)^{(2r-k+j)}\Big\|_\Phi\\&\leqslant\|\varphi^{2r}(G_nf)^{(2r)}\|_\Phi+C\sum_{j=2}^{2r-1}n^{-\frac{j}{2}}\sum_{k=0}^{j}\|\varphi^{2r+j-k}(G_nf)^{(2r-k+j)}\|_\Phi\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant C\Big(n^r\|f\|_\Phi+\sum_{j=2}^{2r-1}n^{-\frac{j}{2}}\sum_{k=0}^{j}n^{r+\frac{j-k}{2}}\|f\|_\Phi\Big)\\
&\leqslant Cn^r\|f\|_\Phi.
\end{aligned}
$$

再证式 (2.3). 由式 (2.1) 得

$$
\begin{aligned}
&\|\varphi^{2r}(G_n^{(2r-1)}f)^{(2r)}\|_\Phi\leqslant\|\varphi^{2r}(G_nf)^{(2r)}\|_\Phi+C\sum_{j=2}^{2r-1}n^{-\frac{j}{2}}\sum_{k=0}^{j}\|\varphi^{2r+j-k}(G_nf)^{(2r-k+j)}\|_\Phi\\
&\leqslant C\|\varphi^{2r}f^{(2r)}\|_\Phi+C\sum_{j=2}^{2r-1}n^{-\frac{j}{2}}\sum_{k=0}^{j}n^{\frac{j-k}{2}}\|\varphi^{2r}f^{(2r)}\|_\Phi\leqslant C\|\varphi^{2r}f^{(2r)}\|_\Phi.
\end{aligned}
$$

定理 2.1 (逆定理)　设 $f\in L_\Phi^*(0,\infty)$, $\varphi(x)=x$, $n\geqslant 4r$, $0<\alpha<r$, 且 $\|G_n^{(2r-1)}f-f\|_\Phi=O(n^{-\alpha})\ (n\to\infty)$, 则

$$\omega_{2r,\varphi}(f,t)_\Phi=O(t^{2\alpha})\quad(t\to 0^+).$$

证　明　由式 (2.2), 式 (2.3), $\|G_n^{(2r-1)}f-f\|_\Phi=O(n^{-\alpha})$, 得

$$K_{2r,\varphi}(f,n^{-r})_\Phi\leqslant C_1n^{-\alpha}+C_2\Big(\frac{k}{n}\Big)^rK_{2r,\varphi}(f,k^{-r})_\Phi,\quad k\geqslant 4r.$$

由 Berens-Lorentz 引理及 K-泛函与光滑模的等价性便得到

$$\omega_{2r,\varphi}(f,n^{-\frac{1}{2}})_\Phi=O(n^{-\alpha}).$$

即

$$\omega_{2r,\varphi}(f,t)_\Phi=O(t^{2\alpha}).$$

利用定理 1.1 和定理 2.1, 就能得到如下等价定理.

定理 2.2 (等价定理)　设 $f\in L_\Phi^*(0,\infty)$, $\varphi(x)=x$, $n\geqslant 4r$, $\Psi\in\Delta_2$, $0<\alpha<r$, 则

$$\|G_n^{(2r-1)}f-f\|_\Phi=O(n^{-\alpha})\quad(n\to\infty)\Leftrightarrow\omega_{2r,\varphi}(f,t)_\Phi=O(t^{2\alpha})\quad(t\to 0^+).$$

注 2.1　定理 2.2 的逼近结果比定理 A 和定理 B 的结果好. 这表明拟中插式 Gamma 算子与 Gamma 算子相比较其优点在于逼近速度更快, 逼近阶更高.

[参　考　文　献]

[1] HE Y Z. Ba spaces and Orlicz space [J]. Function Spaces and Complex Analysis, 1997, 2: 37-62.

[2] 韩领兄, 吴嘎日迪, 刘国锋. Orlicz 空间中加权光滑模与 K-泛函的等价性及其应用 [J]. 数学物理学报, 2014, 34A(1): 95-108.

[3] 韩领兄, 吴嘎日迪. Gamma 算子在 Orlicz 空间 $L_\Phi^*(0,\infty)$ 中加 Jacobi 权同时逼近的强逆不等式 [J]. 高校应用数学学报, 2016, 31A(3): 366-378.

[4] MÜLLER M W. Die Folge der Gammaoperatoren [D]. Stuttgart: Stuttgart University, 1967.

[5] LUPAS A, MACHE D H, MÜLLER M W. Weighted L_p-approximation of derivatives by the method of Gamma-operators [J]. Results Math, 1995, 28: 277-286.

[6] LUPAS A, MACHE D H, MAIER V, et al. Linear combinations of gamma operators in L_p-spaces [J]. Results Math, 1998, 34: 156-168.

[7] LUPAS A, MÜLLER M W. Approximationseigenschaften der Gammaoperatoren [J]. Math Z, 1967, 98: 208-226.

[8] MÜLLER M W. Punktweise und gleichmäßige Approximation durch Gammaoperatoren [J]. Math Z, 1968, 103: 227-238.

[9] MÜLLER M W. Einige Approximationseigenschaften der Gammaoperatoren [J]. Mathematica, 1968, 10(33): 303-310.
[10] TOTIK V. The gammaoperators in L_p-spaces [J]. Publ Math Debrecen, 1985, 32: 43-55.
[11] DITZIAN Z, TOTIK V. Moduli of Smoothness [M]. New York: Springer-Verlag, 1987.
[12] GUO S S, QI Q L. Pointwise weighted simultaneous approximation by Gamma operators [J]. J Nanjing University Mathematical Biquarterly, 2003, 20(1): 24-37.
[13] 齐秋兰, 郭顺生, 黄苏霞. Gamma 算子在 $L_p(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ 空间带权同时逼近的强逆不等式 [J]. 数学物理学报, 2008, 28A(3): 537-545.
[14] SABLONNIÈRE P. Representation of quasi interplants as differential operators and applications [J]. International Series of Numerical Mathematics, 1999, 132: 233-252.
[15] MÜLLER M W. The central approximation theorems for the method of left Gamma quasi-interpolants in L_p spaces [J]. Journal of Computational Analysis and Applicactions, 2001, 3(3): 207-222.
[16] 韩领兄, 吴嘎日迪. Bernstein Durrmeyer 算子拟中插式在 Orlicz 空间中的逼近 [J]. 数学杂志, 2017, 37(3): 488-496.

(责任编辑: 林 磊)

(上接第 30 页)

[10] FLEISCHNER H. 欧拉图与相关专题 [M]. 孙志人, 李皓, 刘桂珍, 等, 译. 北京: 科学出版社, 2012.
[11] 陈慧敏. 在 $C_k(l,m)$ 中的 k-超欧拉图 [D]. 武汉: 华中师范大学, 2015.
[12] 安明强, 熊黎明. 超欧拉图、可折叠图及匹配 [J]. 应用数学学报, 2016, 39(6): 871-877.
[13] WANG B. A degree-sum condition for edge-supereulerian graphs [J]. Journal of Southwest China Normal University, 2009, 34 (1): 16-19.
[14] 李登信, 王斌, 李宵民. 关于判定超欧拉图的收缩法 [J]. 重庆工商大学学报(自然科学版), 2003, 20(1): 1-4.
[15] 李霄民. 判定超欧拉图的一个新方法 [J]. 西南大学学报(自然科学版), 2007, 29(4): 41-43.
[16] 苏静, 马飞, 姚兵. 2-连通图的一些等价定义 [J]. 东北师大学报(自然科学版), 2017, 49(1): 33-37.
[17] 苏静, 马飞, 姚兵. 探索 2-边连通图的等价定义 [J]. 华东师范大学学报(自然科学版), 2017(1): 19-25.
[18] 王晓敏, 赵喜杨, 姚兵. 关于树的若干等价性命题 [J]. 陕西师范大学学报(自然科学版), 2016, 44(2): 11-14.

(责任编辑: 林 磊)