文章编号: 1000-5641(2018)03-0038-08

欧氏空间中超曲面的 L^2 调和 2-形式

张全锐, 刘建成

(西北师范大学 数学与统计学院, 兰州 730070)

摘要: 研究欧氏空间 $\mathbf{R}^{n+1}(n \geqslant 3)$ 中完备超曲面 M 上的 L^2 调和 2-形式. 应用 Bochner 技巧, 证明了当 M 的无迹对称张量 Φ 和平均曲率向量 H 的 $L^n(M)$ 范数均有只依赖于 n 的适当上界时, M 上的 L^2 调和 2-形式是平行的. 进一步, 若 M 为非极小超曲面, 则 M 上不存在非平凡的 L^2 调和 2-形式.

关键词: 欧氏空间; 超曲面; L^2 调和 2-形式; 非极小

中图分类号: O157.5 **文献标志码:** A **DOI:** 10.3969/j.issn.1000-5641.2018.03.005

L^2 harmonic 2-forms on a hypersurface in Euclidean space

ZHANG Quan-rui, LIU Jian-cheng

(*College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou* 730070, *China*)

Abstract: In this paper, we study L^2 harmonic 2-forms on a complete hypersurface M of Euclidean space $\mathbf{R}^{n+1}$ $(n \geqslant 3)$. By applying the Bochner technique, we prove that if the $L^n(M)$ norms of the traceless second fundamental form Φ and the mean curvature vector H are both bounded from above by certain constants which depend only on n, then the L^2 harmonic 2-forms on M are parallel. Furthermore, if M is a non-minimal hypersurface, then there is no nontrivial L^2 harmonic 2-form on M.

Keywords: Euclidean space; hypersurface; L^2 harmonic 2-forms; non-minimal

0 引 言

众所周知, 调和函数定理在研究流形的拓扑结构和非紧致黎曼流形的曲率中扮演着很重要的角色. 另一方面, Hodge 定理表明调和微分形式在刻画紧致黎曼流形的结构中是很重要的研究工具, 而在非紧致流形中, Hodge 定理依然有效. 同时, 调和 1-形式理论做非线性推广可用于研究 p-调和映照理论; 调和 2-形式理论做非线性推广则可用于研究 Yang-Mills 场理论, 因此研究调和形式是有意义的.

do Carmo, Peng[1]和 Fischer-Colbrie, Schoen[2]证明了 3 维欧氏空间 $\mathbf{R}^3$ 中完备定向稳定极小曲面是平面. 对于高维超曲面, 没有上述好的结果, 但是可以用调和形式来刻画. Yun 在

收稿日期: 2017-05-01

基金项目: 国家自然科学基金(11261051, 11761061)

第一作者: 张全锐, 男, 硕士研究生, 研究方向为微分几何. E-mail: zhangqr90@163.com.

文献[3]中证明了若 $\mathbf{R}^{n+1}(n\geqslant 3)$ 中完备可定向极小超曲面 M 的第二基本型 A 满足

$$\|A\|_{L^n(M)}:=\left(\int_M |A|^n\mathrm{d}v\right)^{\frac{1}{n}}\leqslant \frac{n-2}{2(n-1)C(n)},$$

则 M 上不存在非平凡的 L^2 调和 1-形式, 并且 M 只有一个端, 其中 $C(n)$ 为只依赖于 n 的正常数. 对于高阶余维数的情形, 付海平在文献 [4] 中证明了若 $\mathbf{R}^{n+m}(n\geqslant 3)$ 中的 n 维完备子流形 M^n 的无迹张量 Φ 和平均曲率向量 H 满足

$$\|\Phi\|_{L^n(M^n)}<\frac{(n-2)(1-\alpha)}{(n-1)\sqrt{n-1}C(n)},$$

$$\|H\|_{L^n(M^n)}\leqslant \frac{\alpha}{nC(n)},$$

则 M^n 上不存在非平凡的 L^2 调和 1-形式, 并且 M^n 只有一个端, 其中 $C(n)$ 为只依赖于 n 的正常数, $\alpha\in[0,1)$ 为实数.

对于调和 2-形式, Tanno 在文献[5]中证明了 $\mathbf{R}^{n+1}(n\leqslant 4)$ 中的完备可定向稳定极小超曲面 M 上不存在非平凡的 L^2 调和 2-形式. 朱鹏在文献[6]中考虑将外围空间改为球空间 $S^{n+1}(n\leqslant 4)$, M 改为完备非紧强稳定超曲面, 结果同样成立. 在文献[7]中, 朱鹏考虑截面曲率有界的 5 维外围空间 N^5, 证明了当 N^5 满足 $\frac{17}{5}$-拼挤时, 完备非紧稳定极小且体积无限的超曲面上同样不存在非平凡的 L^2 调和 2-形式. 在文献[8]中, 朱鹏考虑球空间中的完备非紧超曲面, 证明了当超曲面的第二基本型模长满足 $|A|\leqslant D$ 时, M 上的 L^2 调和 2-形式是平行的. 进一步, 若 $|A|<D$, 则 M 上不存在非平凡的 L^2 调和 2-形式, 其中

$$D=\begin{cases}\sqrt{2}, & n=3,\\ 2, & n\geqslant 4.\end{cases}$$

同时还证明了若 M 的无迹对称张量 Φ 的 $L^n(M)$ 范数不大于 $\delta(n)$, 则 M 上不存在非平凡的 L^2 调和 2-形式, 其中 $\delta(n)$ 满足

$$\delta(n)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt[3]{\omega_3}}{3\cdot\sqrt{2}\cdot 4^4}, & n=3,\\[2ex] \dfrac{(n-2)\sqrt[n]{\omega_n}}{2n(n-1)\cdot 4^{n+1}}, & n\geqslant 4.\end{cases}$$

由于文献 [5]、[6] 做了 4 维及以下欧氏空间(或球空间)中超曲面上非平凡 L^2 调和 2-形式的不存在性问题, 文献[8]补充了高维球空间中的该类问题. 对于高维欧氏空间中的该类问题并没有相关文献, 故本文考虑高维欧氏空间中超曲面上非平凡 L^2 调和 2-形式的不存在性问题, 对比文献[8]中高维球空间中超曲面上非平凡 L^2 调和 2-形式的不存在性问题, 得到以下定理.

定理 0.1　设 M 是欧氏空间 $\mathbf{R}^{n+1}(n\geqslant 3)$ 中的完备超曲面, 记 Φ、H 分别为 M 的无迹张量和平均曲率向量. 如果 $|\Phi|\leqslant|H|$, 那么 M 上的 L^2 调和 2-形式是平行的. 进一步若 $|\Phi|<|H|$, 则 M 上不存在非平凡的 L^2 调和 2-形式.

定理 0.2　设 M 是欧氏空间 $\mathbf{R}^{n+1}(n\geqslant 3)$ 中的完备超曲面, 记 Φ、H 分别为 M 的无迹张量和平均曲率向量. 若存在一个实数 $\alpha\in[0,1)$ 以及一个仅依赖于 n 的正实数 $C(n)$, 使得

$\|\Phi\|_{L^n(M)} < \mu(n)$, $\|H\|_{L^n(M)} \leqslant \frac{\alpha}{nC(n)}$, 那么 M 上的 L^2 调和 2-形式是平行的. 进一步, 若 M 是非极小超曲面, 则 M 上不存在非平凡的 L^2 调和 2-形式, 其中

$$\mu(n) = \begin{cases} \dfrac{1-\alpha}{4C(3)}, & n=3, \\ \sqrt{\dfrac{n-2}{2n(n-1)}} \cdot \dfrac{1-\alpha}{C(n)}, & n \geqslant 4. \end{cases}$$

注 定理 0.1 中是关于无迹张量和平均曲率向量的一个整体关系式, 是一个整体限制, 而定理 0.2 中是对无迹张量和平均曲率向量分别进行限制, 二者不再相互制约.

1 预备知识及引理

设 M 为欧氏空间 $\mathbf{R}^{n+1}$ 中的完备可定向超曲面. 记 R、Ric 分别为 M 上的曲率张量和 Ricci 曲率张量, 约定 $1 \leqslant i,j,k,l,p,\cdots \leqslant n$. 选取 $\mathbf{R}^{n+1}$ 的局部标准正交标架 $\{e_1,e_2,\cdots,e_{n+1}\}$, 使得 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 为 M 的切标架, $\{e^1,e^2,\cdots,e^n\}$ 为其对偶余标架. 令

$$\omega = \sum a_{i_1\cdots i_p} e^{i_p} \wedge \cdots \wedge e^{i_1} = a_I \omega_I,$$
$$\theta = \sum b_{i_1\cdots i_p} e^{i_p} \wedge \cdots \wedge e^{i_1} = b_I \omega_I.$$

则有

$$|\omega|^2 = \sum_I {a_I}^2,\ \ |\nabla\omega|^2 = \sum_i |\nabla_{e_i}\omega|^2,\ \ \langle\omega,\theta\rangle = \sum_I a_I b_I.$$

记 A、H 分别为 M 的第二基本型和平均曲率向量, 无迹张量 Φ 定义为

$$\Phi(X,Y) = A(X,Y) - H\langle X,Y\rangle,$$

其中 X, Y 是 M 上的切向量场, 易知 $|\Phi|^2 = |A|^2 - n|H|^2$.

记 $\wedge^p(M)$ 表示 M 的 p 次外形式空间, 则 Hodge 算子 $*: \wedge^p(M) \to \wedge^{n-p}(M)$ 定义为

$$*e^{i_1} \wedge \cdots \wedge e^{i_p} = \operatorname{sgn}\delta(i_1,i_2,\cdots,i_p,i_{p+1},\cdots,i_n) e^{i_{p+1}} \wedge \cdots \wedge e^{i_n},$$

其中 $\delta(i_1,i_2,\cdots,i_p,i_{p+1},\cdots,i_n)$ 为 $(i_1,i_2,\cdots,i_p,i_{p+1},\cdots,i_n)$ 的置换, sgn 为符号函数. Hodge 余星算子 d^*: $\wedge^p(M) \to \wedge^{p-1}(M)$ 定义为

$$\mathrm{d}^*\omega = (-1)^{np+n+1} * \mathrm{d} * \omega.$$

进而, 作用在 p-形式 ω 上的 Laplace 算子定义为

$$\Delta\omega = -(\mathrm{dd}^* + \mathrm{d}^*\mathrm{d})\omega.$$

对于 p-形式 ω, 若 $\Delta\omega = 0$, 则称 ω 为调和的; 若 $\Delta\omega = 0$, 且 $\int_M \omega \wedge *\omega \mathrm{d}v < +\infty$, 则称 ω 为 L^2 调和的; 若 $\nabla\omega = 0$, 则称 ω 为平行的, 其中 ∇ 是 M 上的 Levi-Civita 联络. 记 $H^p(L^2(M))$ 为 M 上所有 L^2 调和 p-形式构成的空间.

引理 1.1[9]　设 (M^n, g) 是 n 维黎曼流形, 则对 p-形式 $\omega = a_I\omega_I \in \wedge^p(M)$, 有

$$\frac{1}{2}\Delta|\omega|^2 = \langle\Delta\omega, \omega\rangle + |\nabla\omega|^2 + \langle E(\omega), \omega\rangle,$$

其中 $E(\omega) = R_{k_\beta i_\beta j_\alpha i_\alpha} a_{i_1\cdots k_\beta\cdots i_p} e^{i_p} \wedge \cdots \wedge e^{j_\alpha} \wedge \cdots \wedge e^{i_1}$.

引理 1.2[10]　设 M 是欧氏空间 $\mathbf{R}^{n+1}(n \geqslant 3)$ 中的完备超曲面, 则对 $\forall f \in C_0^1(M)$ 有

$$\left(\int_M |f|^{\frac{n}{n-1}}\mathrm{d}v\right)^{\frac{n-1}{n}} \leqslant C(n)\left(\int_M |\nabla f|\mathrm{d}v + n\int_M |H||f|\mathrm{d}v\right),$$

其中 H 为 M 的平均曲率向量, $C(n)$ 为仅依赖于 n 的正实数.

引理 1.3[11-12]　令 M 是 n 维黎曼流形, ω 是 M 上的调和 p-形式, 则

$$(1 + K_p)\big|\nabla|\omega|\big|^2 \leqslant |\nabla\omega|^2,$$

其中

$$K_p = \begin{cases} \dfrac{1}{n-p}, & 1 \leqslant p \leqslant \dfrac{n}{2}, \\[2mm] \dfrac{1}{p}, & \dfrac{n}{2} < p \leqslant n-1. \end{cases}$$

命题 1.1　设 M 是欧氏空间 $\mathbf{R}^{n+1}(n \geqslant 3)$ 中的完备超曲面, 则对于 2-形式 $\omega = a_{ij}e^j \wedge e^i \in \wedge^2(M)$ 有

$$\langle E(\omega), \omega\rangle \geqslant \frac{n}{2}\big(|H|^2 - |\Phi|^2\big)|\omega|^2.$$

证　明　由引理 1.1 得

$$\begin{aligned} E(\omega) &= R_{k_1i_1j_1i_1}a_{k_1i_2}e^{i_2} \wedge e^{j_1} + R_{k_2i_2j_2i_2}a_{i_1k_2}e^{j_2} \wedge e^{i_1} \\ &\quad + R_{k_2i_2j_1i_1}a_{i_1k_2}e^{i_2} \wedge e^{j_1} + R_{k_1i_1j_2i_2}a_{k_1i_2}e^{j_2} \wedge e^{i_1} \\ &= \mathrm{Ric}_{k_1j_1}a_{k_1i_2}e^{i_2} \wedge e^{j_1} + \mathrm{Ric}_{k_2j_2}a_{i_1k_2}e^{j_2} \wedge e^{i_1} \\ &\quad + R_{k_2i_2j_1i_1}a_{i_1k_2}e^{i_2} \wedge e^{j_1} + R_{k_1i_1j_2i_2}a_{k_1i_2}e^{j_2} \wedge e^{i_1}. \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned} \langle E(\omega), \omega\rangle &= \mathrm{Ric}_{k_1j_1}a_{k_1i_2}a_{j_1i_2} + \mathrm{Ric}_{k_2j_2}a_{i_2k_2}a_{i_1j_2} \\ &\quad + R_{k_2i_2j_1i_1}a_{i_1k_2}a_{j_1i_2} + R_{k_1i_1j_2i_2}a_{k_1i_2}a_{i_1j_2}. \end{aligned}$$

由 Gauss 方程 $R_{ijkl} = h_{ik}h_{jl} - h_{il}h_{jk}$ 得

$$\begin{aligned} \mathrm{Ric}_{k_1j_1} &= nHh_{k_1j_1} - h_{k_1i}h_{ij_1}, \quad \mathrm{Ric}_{k_2j_2} = nHh_{k_2j_2} - h_{k_2i}h_{ij_2}, \\ R_{k_2i_2j_1i_1} &= h_{k_2j_1}h_{i_2i_1} - h_{k_2i_1}h_{i_2j_1}, \quad R_{k_1i_1j_2i_2} = h_{k_1j_2}h_{i_1i_2} - h_{k_1i_2}h_{i_1j_2}. \end{aligned}$$

在任意点 $p \in M$ 处, 选取适当的标准正交标架 $\{e_i\}$, 使得 $h_{ij} = \lambda_i\delta_{ij}$, 其中 λ_i 是第二基本型 $A = (h_{ij})$ 的特征值. 显然,

$$n|H| = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n.$$

故

$$\begin{aligned}\langle E(\omega),\omega\rangle &= \mathrm{Ric}_{k_1j_1}a_{k_1i_2}a_{j_1i_2}+\mathrm{Ric}_{k_2j_2}a_{i_2k_2}a_{i_1j_2}+R_{k_2i_2j_1i_1}a_{i_1k_2}a_{j_1i_2}+R_{k_1i_1j_2i_2}a_{k_1i_2}a_{i_1j_2}\\ &=\sum n|H|\lambda_{k_1}(a_{k_1i_2})^2-\sum {\lambda_{k_1}}^2(a_{k_1i_2})^2+\sum n|H|\lambda_{k_2}(a_{i_1k_2})^2-\sum {\lambda_{k_2}}^2(a_{i_1k_2})^2\\ &\quad-\sum\lambda_{k_2}\lambda_{i_2}(a_{k_2i_2})^2-\sum\lambda_{j_2}\lambda_{i_2}(a_{j_2i_2})^2\\ &=2n\sum|H|\lambda_i(a_{ij})^2-2\sum\lambda_i^2(a_{ij})^2-2\sum\lambda_i\lambda_j(a_{ij})^2\\ &=2\sum_{i\neq j}\big((\lambda_1+\cdots+\lambda_n)\lambda_i-\lambda_i^2-\lambda_i\lambda_j\big)(a_{ij})^2.\end{aligned}$$

当 $n=3$ 时,

$$\begin{aligned}\langle E(\omega),\omega\rangle &= 2\sum_{i\neq j}\big((\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)\lambda_i-\lambda_i^2-\lambda_i\lambda_j\big)(a_{ij})^2\\ &=\sum_{i\neq j}(\lambda_1+\cdots+\hat{\lambda}_i+\cdots+\hat{\lambda}_j+\cdots+\lambda_3)(\lambda_i+\lambda_j)(a_{ij})^2\\ &\geqslant\frac12\sum_{i\neq j}\big((3|H|)^2-(\lambda_1+\cdots+\hat{\lambda}_i+\cdots+\hat{\lambda}_j+\cdots+\lambda_3)^2-2({\lambda_i}^2+{\lambda_j}^2)\big)(a_{ij})^2\\ &\geqslant\frac12\big(|A|^2-3|\Phi|^2\big)|\omega|^2.\end{aligned}$$

又 $|\Phi|^2=|A|^2-3|H|^2\geqslant 0$, 故 $|A|^2\geqslant 3|H|^2$. 即

$$\begin{aligned}\langle E(\omega),\omega\rangle &\geqslant\frac12\big(|A|^2-3|\Phi|^2\big)|\omega|^2\geqslant\frac12\big(3|H|^2-3|\Phi|^2\big)|\omega|^2\\ &=\frac32\big(|H|^2-|\Phi|^2\big)|\omega|^2.\end{aligned}\tag{1}$$

当 $n\geqslant 4$ 时,

$$\begin{aligned}\langle E(\omega),\omega\rangle &= 2\sum_{i\neq j}\big((\lambda_1+\cdots+\lambda_n)\lambda_i-\lambda_i^2-\lambda_i\lambda_j\big)(a_{ij})^2\\ &=\sum_{i\neq j}(\lambda_1+\cdots+\hat{\lambda}_i+\cdots+\hat{\lambda}_j+\cdots+\lambda_n)(\lambda_i+\lambda_j)(a_{ij})^2\\ &\geqslant\frac12\sum_{i\neq j}\left((n|H|)^2-(n-2)\left(\sum_{k\neq i,j}^{n}(\lambda_k)^2+({\lambda_i}^2+{\lambda_j}^2)\right)\right)(a_{ij})^2\\ &\geqslant\left(|A|^2-\frac n2|\Phi|^2\right)|\omega|^2.\end{aligned}$$

又 $|\Phi|^2=|A|^2-n|H|^2\geqslant 0$, 故 $|A|^2\geqslant n|H|^2\geqslant\frac n2|H|^2$. 即

$$\langle E(\omega),\omega\rangle\geqslant\big(|A|^2-\frac n2|\Phi|^2\big)|\omega|^2\geqslant\frac n2\big(|H|^2-|\Phi|^2\big)|\omega|^2.\tag{2}$$

综合式(1)、(2), 对于 $n\geqslant 3$, 命题 1.1 成立.

2 主要结果的证明

定理 0.1的证明 设 $\omega\in H^2(L^2(M))$, 有 $\Delta\omega=0$, $\int_M|\omega|^2\mathrm{d}v<+\infty$. 由引理 1.1 得

$$\frac12\Delta|\omega|^2=|\nabla\omega|^2+\langle E(\omega),\omega\rangle.\tag{3}$$

记 x 到定点 $x_0(x_0\in M)$ 的测地距离为 $\rho(x)$, 选取 $\eta\in C_0^\infty(M)$ 是具有紧致支撑集的光滑函数, 使得对于 $\forall\, r>0$ 有

$$\eta=\begin{cases}1, & \rho<r,\\ a\in[0,1], & |\nabla\eta|<\dfrac{2}{r}, r\leqslant\rho\leqslant 2r,\\ 0, & \rho>2r.\end{cases}\tag{4}$$

在式 (3) 两边同时乘以 η^2 并在 M 上积分得

$$\begin{aligned}\int_M\eta^2|\nabla\omega|^2\mathrm{d}v+\int_M\eta^2\langle E(\omega),\omega\rangle\mathrm{d}v&=\frac{1}{2}\int_M\eta^2\Delta|\omega|^2\mathrm{d}v\\&=-\frac{1}{2}\int_M\langle\nabla\eta^2,\nabla|\omega|^2\rangle\mathrm{d}v\\&=-2\int_M\eta|\omega|\langle\nabla\eta,\nabla|\omega|\rangle\mathrm{d}v.\end{aligned}\tag{5}$$

又对于任意的正常数 ε, 由 Cauchy-Schwarz 不等式

$$\pm2\int_M\eta|\omega|\langle\nabla\eta,\nabla|\omega|\rangle\mathrm{d}v\leqslant\varepsilon\int_M\eta^2\big|\nabla|\omega|\big|^2\mathrm{d}v+\frac{1}{\varepsilon}\int_M|\omega|^2|\nabla\eta|^2\mathrm{d}v$$

以及引理 1.3, 式 (5) 可改写为

$$\left(1-\frac{\varepsilon}{1+K_p}\right)\int_M\eta^2|\nabla\omega|^2\mathrm{d}v+\int_M\eta^2\langle E(\omega),\omega\rangle\mathrm{d}v\leqslant\frac{1}{\varepsilon}\int_M|\omega|^2|\nabla\eta|^2\mathrm{d}v.\tag{6}$$

又 η 为满足式 (4) 的函数, 则由式 (6) 得

$$\left(1-\frac{\varepsilon}{1+K_p}\right)\int_{B_{x_0}(r)}|\nabla\omega|^2\mathrm{d}v+\int_{B_{x_0}(r)}\langle E(\omega),\omega\rangle\mathrm{d}v\leqslant\frac{4}{\varepsilon r^2}\int_{B_{x_0}(2r)}|\omega|^2\mathrm{d}v.\tag{7}$$

根据命题 1.1, $\langle E(\omega),\omega\rangle\geqslant\frac{n}{2}\big(|H|^2-|\Phi|^2\big)|\omega|^2$. 又由条件 $|\Phi|\leqslant|H|$ 知 $\langle E(\omega),\omega\rangle\geqslant0$. 当存在充分小的 $\varepsilon>0$ 使得 $1-\frac{\varepsilon}{1+K_p}>0$ 时, 由积分性质, 在式 (7) 中令 $r\to+\infty$, 我们得到

$$|\nabla\omega|=\langle E(\omega),\omega\rangle=0.$$

所以 M 上的 L^2 调和 2-形式是平行的. 进一步若 $|\Phi|<|H|$, 由 $\langle E(\omega),\omega\rangle=0$ 知 $\omega=0$, 即 M 上不存在非平凡的 L^2 调和 2-形式. 定理 0.1 证毕.

定理 0.2 的证明　设 $\omega\in H^2(L^2(M))$, 根据命题 1.1, $\langle E(\omega),\omega\rangle\geqslant\frac{n}{2}\big(|H|^2-|\Phi|^2\big)|\omega|^2$, 代入式 (6) 可得

$$\left(1-\frac{\varepsilon}{1+K_p}\right)\int_M\eta^2|\nabla\omega|^2\mathrm{d}v+\frac{n}{2}\int_M\eta^2\big(|H|^2-|\Phi|^2\big)|\omega|^2\mathrm{d}v\leqslant\frac{1}{\varepsilon}\int_M|\omega|^2|\nabla\eta|^2\mathrm{d}v.\tag{8}$$

依条件 $\|H\|_{L^n(M)}\leqslant\frac{\alpha}{nC(n)}$, 对 $\forall f\in C_0^1(M)$, 由 Hölder 不等式得

$$\begin{aligned}nC(n)\int_M|H||f|\mathrm{d}v&\leqslant nC(n)\left(\int_M|H|^n\mathrm{d}v\right)^{\frac{1}{n}}\left(\int_M|f|^{\frac{n}{n-1}}\mathrm{d}v\right)^{\frac{n-1}{n}}\\&\leqslant\alpha\left(\int_M|f|^{\frac{n}{n-1}}\mathrm{d}v\right)^{\frac{n-1}{n}}.\end{aligned}$$

结合引理 1.2 得

$$\left(\int_M |f|^{\frac{n}{n-1}}\mathrm{d}v\right)^{\frac{n-1}{n}} \leqslant \frac{C(n)}{1-\alpha}\int_M |\nabla f|\mathrm{d}v,$$

上式中令 $f=g^{\frac{2(n-1)}{n-2}}$, 其中 $g\in C_0^1(M)$, 于是有

$$\left(\int_M |g|^{\frac{2n}{n-2}}\mathrm{d}v\right)^{\frac{n-2}{n}} \leqslant \frac{4(n-1)^2C(n)^2}{(1-\alpha)^2(n-2)^2}\int_M |\nabla g|^2\mathrm{d}v.$$

利用上式和 Hölder 不等式得

$$\begin{aligned}\int_M \eta^2|\Phi|^2|\omega|^2\mathrm{d}v &\leqslant \left(\int_M |\Phi|^n\mathrm{d}v\right)^{\frac{2}{n}}\left(\int_M (\eta|\omega|)^{\frac{2n}{n-2}}\mathrm{d}v\right)^{\frac{n-2}{n}}\\ &\leqslant \frac{4(n-1)^2\phi_0C(n)^2}{(1-\alpha)^2(n-2)^2}\int_M |\nabla(\eta|\omega|)|^2\mathrm{d}v\\ &\leqslant \frac{4(n-1)^2\phi_0C(n)^2}{(1-\alpha)^2(n-2)^2}\int_M \left((1+\varepsilon)\eta^2\big|\nabla|\omega|\big|^2+\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)|\omega|^2|\nabla\eta|^2\right)\mathrm{d}v\\ &\leqslant \frac{4(n-1)^2\phi_0C(n)^2}{(1-\alpha)^2(n-2)^2}\int_M \left(\frac{1+\varepsilon}{1+K_p}\eta^2|\nabla\omega|^2+\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)|\omega|^2|\nabla\eta|^2\right)\mathrm{d}v.\end{aligned}$$

其中 $\phi_0=(\int_M |\Phi|^n\mathrm{d}v)^{\frac{2}{n}}$. 将上式代入式 (8), 整理后得

$$l_1\int_M \eta^2|\nabla\omega|^2\mathrm{d}v+\frac{n}{2}\int_M \eta^2|H|^2|\omega|^2\mathrm{d}v \leqslant l_2\int_M |\omega|^2|\nabla\eta|^2\mathrm{d}v, \tag{9}$$

其中

$$l_1=1-\frac{2n(n-1)^2\phi_0C(n)^2}{(1+K_p)(1-\alpha)^2(n-2)^2}-\frac{\varepsilon}{1+K_p}\left(1+\frac{2n(n-1)^2\phi_0C(n)^2}{(1-\alpha)^2(n-2)^2}\right),$$

$$l_2=\frac{1}{\varepsilon}+\frac{2n(n-1)^2\phi_0C(n)^2}{(1-\alpha)^2(n-2)^2}\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

又 η 为满足式 (4) 的函数, 则由式 (9) 得

$$l_1\int_{B_{x_0}(r)} |\nabla\omega|^2\mathrm{d}v+\frac{n}{2}\int_{B_{x_0}(r)} |H|^2|\omega|^2\mathrm{d}v \leqslant \frac{4l_2}{r^2}\int_{B_{x_0}(2r)} |\omega|^2\mathrm{d}v. \tag{10}$$

显然 $l_2>0$.

当 $n=3$ 时, $K_p=\frac{1}{2}$, $(\int_M |\Phi|^3\mathrm{d}v)^{\frac{1}{3}}<\frac{1-\alpha}{4C(3)}$, 存在充分小的 $\varepsilon>0$ 使得 $l_1>0$. 由积分性质, 在式 (10) 中令 $r\to+\infty$, 我们得到

$$|\nabla\omega|=|H||\omega|=0.$$

所以 M 上的 L^2 调和 2-形式是平行的. 进一步若 M 为非极小超曲面, 由 $|H||\omega|=0$ 知 $\omega=0$, 即 M 上不存在非平凡的 L^2 调和 2-形式.

当 $n\geqslant 4$ 时, $K_p=\frac{1}{n-2}$, $(\int_M |\Phi|^n\mathrm{d}v)^{\frac{1}{n}}<\sqrt{\frac{n-2}{2n(n-1)}}\cdot\frac{1-\alpha}{C(n)}$, 存在充分小的 $\varepsilon>0$ 使得 $l_1>0$. 由积分性质, 在式 (10) 中令 $r\to+\infty$, 我们得到

$$|\nabla\omega|=|H||\omega|=0.$$

所以 M 上的 L^2 调和 2-形式是平行的. 进一步若 M 为非极小超曲面, 由 $|H||\omega|=0$ 知 $\omega=0$, 即 M 上不存在非平凡的 L^2 调和 2-形式. 定理 0.2 证毕.

[参　考　文　献]

[1] DO CARMO M, PENG C K. Stable complete minimal surfaces in $\mathbf{R}^3$ are planes[J]. Bull Amer Math Soc, 1979, 1: 903-906.

[2] FISCHER-COLBRIE D, SCHOEN R. The structure of complete stable minimal surfaces in 3-manifolds of non-negative scalar curvature[J]. Comm Pure Appl Math, 1980, 33(2): 199-211.

[3] YUN G. Total scalar curvature and L^2 harmonic 1-forms on a minimal hypersurface in Euclidean space[J]. Geom Dedicata, 2002, 89: 135-141.

[4] 付海平. 子流形上整体几何与几何分析的若干问题研究[D]. 杭州: 浙江大学, 2007.

[5] TANNO S. L^2 harmonic forms and stability of minimal hypersurfaces[J]. J Math Soc Japan, 1996, 48: 761-768.

[6] ZHU P. L^2 harmonic forms and stable hypersurfaces in space forms[J]. Arch Math, 2011, 97: 271-279.

[7] 朱鹏. 调和 2-形式与极小超曲面[J]. 阜阳师范学院学报(自然科学版), 2011, 28(4): 1-3.

[8] ZHU P. Gap theorems on hypersurfaces in spheres[J]. J Math Anal Appl, 2015, 430: 742-754.

[9] LI P. Lecture Notes on Geometric Analysis[M]. Seoul: Seoul National University, 1993: 17-23.

[10] HOFFMAN D, SPRUCK J. Sobolev and isoperimetric inequalities for Riemannian submanifolds[J]. Comm Pure Appl Math, 1974, 27: 715-727.

[11] LIN H Z. L^2 harmonic forms on submanifolds in a Hadamard manifold[J]. Nonlinear Anal. 2015, 125: 310-322.

[12] CALDERBANK D M J, GAUDUCHON P, HERZLICH M. Refined Kato inequalities and conformal weights in Riemannian geometry[J]. J Funct Anal, 2000, 173(1): 214-255.

(责任编辑: 林　磊)

(上接第 24 页)

[2] FRIEDLANDER E M, PARSHALL B. Modular representation theory of Lie algebras [J]. The American Journal of Mathematics, 1988, 110: 1055-1093.

[3] JANTZEN J C. Subregular nilpotent representations of $\mathfrak{sl}_n$ and $\mathfrak{so}_{2n+1}$ [J]. Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 1999, 126: 223-257.

[4] JANTZEN J C. Representations of Lie algebras in prime characteristic [C]//Proceedings of Representation Theories and Algebraic Geometry. Montreal: NATO ASI, 1997.

(责任编辑: 林　磊)