

文章编号: 1000-5641(2018)04-0001-08

耦合时空时滞的单种群模型行波解的存在性

杨高翔, 赵临龙

(安康学院 数学与统计学院, 陕西 安康 725000)

摘要: 主要借助几何奇异摄动法分析了一类带时空时滞的单种群模型中行波解的存在性, 分析结果表明当时滞量比较小时该单种群模型存在波前解. 另外, 借助数值模拟的方法验证了该理论结果, 模拟结果发现当时滞比较小时数值模拟结果与理论分析结果相吻合, 该单种群模型存在波前解.

关键词: 时空时滞; 行波解; 奇异摄动法

中图分类号: O175.26 **文献标志码:** A **DOI:** 10.3969/j.issn.1000-5641.2018.04.001

Existence of a travelling wave solution for a single population model with spatio-temporal delay

YANG Gao-xiang, ZHAO Lin-long

(School of Mathematics and Statistics, Ankang University, Ankang Shaanxi 725000, China)

Abstract: In this paper, the existence of a travelling wave solution for a single population model with spatio-temporal delay is investigated by employing singular perturbation. The theoretical results are validated by using a numerical method. When the time delay is very small, a wave front solution exists; however, as the time delay increases, the shape of this travelling wave solution can vary and an oscillation wake can occur.

Keywords: spatio-temporal delay; travelling wave solution; singular perturbation method

0 引言

行波在生物种群领域中一直以来可以很好地反映种群在时空中的分布情况, 特别是在诠释入侵种群在空间的传播方面得到了很好应用. 由于在现实世界中种群的分布受多种因素的制约, 比如种群内相互作用的反应时滞因素, 许多生物数学学者也着手研究时滞反应扩散方程中行波解的存在性问题. 文献[1]利用上下解的理论和单调迭代的方法讨论了一类带离散时滞的反应扩散方程中波前解的存在性; 文献[2]还进一步发现时滞还可以导致慢行波解的出现. 当种群模型中的时滞表现为分布时滞的时候, 文献[3-6]借助改进上下解和单调迭

收稿日期: 2017-06-01

基金项目: 陕西省教育厅项目(15JK1016); 安康学院项目(2016AYQDZR10)

第一作者: 杨高翔, 男, 博士, 副教授, 研究方向为反应扩散方程定性理论与生物数学.

E-mail: stx.ygx@aku.edu.cn.

代方法讨论了一些带非局部时滞或者时空滞后反应扩散方程中波前解的存在性问题. 此外, 文献[7]借助几何奇异摄动理论^[8]还讨论了时空滞后效应下种群模型中行波解的存在性问题, 指出在小时滞情况下该行波解的存在条件, 但是并未考虑随着时滞的增加该行波解的动力学行为将如何变化. 关于行波解动力学行为方面的研究还主要集中在种群模型为反应扩散方程或者带空间非局部效应的反应扩散方程的情况. 例如, 文献[9]对两变量的反应扩散方程中行波解的动力学行为做了大量的研究, 指出当描述种群的反应扩散方程的反应方程存在超临界的Hopf分支时, 行波解的动力学会发生一些变化. 具体地讲, 当系统的反应方程发生超临界的Hopf分支时, 会导致系统出现一族周期解.

对于存在时空时滞的种群模型, 最早是由英国的生物数学家 Britton提出^[10], 且时滞对该种群模型的行波解的影响很少有人关注. 本文主要在该模型的基础上考虑如下形式的种群模型

$$u_t = d\Delta u + ru(1 + \alpha u - \beta u^2 - (1 + \alpha - \beta)(f \ast \ast u)), \quad (1)$$

其中

$$(f \ast \ast u)(x, t) = \int_{-\infty}^t \int_{\mathbf{R}} f(x - y, t - s) u(y, s) dy ds, \quad f(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}},$$

$(x, t) \in \mathbf{R} \times (0, +\infty)$, 参数 r 、 α 、 β 、 d 、 τ 均是正参数, r 表示种群的内禀增长率, α 表示种群的聚集效应, β 表示种群个体空间竞争产生的效应, τ 表示由种内相互作用而引起的平均时滞, d 表示种群的扩散系数, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ 是一维空间中的拉普拉斯算子, 而且 $1 + \alpha - \beta > 0$. 模型(1)的各项都有着相应的生物学解释: αu 表示种群的聚集作用、 $-\beta u^2$ 表示种群对空间的竞争、积分项 $-(1 + \alpha - \beta)(f \ast \ast u)$ 表示种群内因食物资源引起的竞争.

1 行波解的存在性

在本节中, 主要关注模型(1)在时空滞后项的条件下, 其波前解的存在性. 为了研究方便, 令 $v(x, t) = (f \ast \ast u)(x, t)$, 且取 $d = 1$, 于是原系统(1)变为如下形式

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + f_1(u, v), \\ v_t = \Delta v + f_2(u, v), \end{cases} \quad (2)$$

其中

$$\begin{aligned} f_1(u, v) &= ru(1 + \alpha - \beta u^2 - (1 + \alpha - \beta)v), \\ f_2(u, v) &= \frac{1}{\tau}(u - v). \end{aligned}$$

下面利用几何奇异摄动理论证明系统(2)在时滞 d 非常小时存在波前解. 为了达到这个目标, 主要从两方面情况来证明这个结论.

情况 1 当 $\tau \rightarrow 0$ 时, $v(x, t) \rightarrow u(x, t)$. 于是系统(1)被转化为如下形式

$$u_t = \Delta u + ru[1 + \alpha u - \beta u^2 - (1 + \alpha - \beta)u]. \quad (3)$$

系统(3)的行波解有如下的形式

$$u(x, t) = \varphi(z), \quad z = x + ct,$$

其中 $c > 0$ 表示波速. 于是, 行波解满足如下的方程

$$c\varphi' = \varphi'' + r\varphi[1 + \alpha\varphi - \beta\varphi^2 - (1 + \alpha - \beta)\varphi], \quad (4)$$

并且满足如下的边界条件: $\varphi(-\infty) = 0, \varphi(+\infty) = 1$.

对于系统(4), 我们有如下的结论:

定理1.1 如果 $c \geq \max \left\{ 2\sqrt{r}, (1+\beta)\sqrt{\frac{r}{\beta}} \right\}$, 那么存在解 $\varphi(z), z = x+ct$, 满足系统(4)和边界条件.

证 明 首先, 令 $\varphi' = \phi$, 则系统(4)转化为如下形式

$$\begin{cases} \varphi' = \phi, \\ \phi' = c\phi' - r\varphi[1 + (\beta - 1)\varphi - \beta\varphi^2]. \end{cases} \quad (5)$$

系统(5)有三个平衡点 $(0,0), (1,0), (-\frac{1}{\beta}, 0)$. 但是, 从生物学的角度, 更关注 $(0,0)$ 和 $(1,0)$ 这两个平衡点, 它们分别对应着该种群的灭绝状态和最大值状态. 借助简单的计算, 我们知道当 $c \geq 2\sqrt{r}$ 时, 平衡点 $(0,0)$ 总是不稳定, 并且平衡点 $(1,0)$ 为鞍点.

为了证明连接平衡点 $(0,0)$ 和 $(1,0)$ 的异宿轨道的存在性, 需要先证明对合适的 $\lambda > 0$, 下面的三角集合

$$B = \{(\varphi, \phi) : 0 \leq \varphi \leq 1, 0 \leq \phi \leq \lambda\varphi\},$$

是负向不变集. 也就是对该三角集合 B 而言, 对其边界上的内法向量和系统(5)右边所决定的向量 f , 满足 $f \cdot n \leq 0$ 成立. 对于该三角集合两直角边非常容易处理. 但是对于其斜边 $\phi = \lambda\varphi$ 而言, 选取 $n = (\lambda, -1)$, 则有

$$\begin{aligned} f \cdot n &= (\phi, c\phi + r\varphi[1 + (\beta - 1)\varphi - \beta\varphi^2]) \cdot (\lambda, -1) |_{(\varphi, \lambda\varphi)} \\ &= \varphi[\lambda^2 - c\lambda + r(1 + (\beta - 1)\varphi - \beta\varphi^2)] \\ &\leq \varphi\left[\lambda^2 - c\lambda + r\frac{(\beta+1)^2}{4\beta}\right]. \end{aligned}$$

这样当 $c \geq (1+\beta)\sqrt{\frac{r}{\beta}}$ 时, 方程 $\lambda^2 - c\lambda + r\frac{(\beta+1)^2}{4\beta} = 0$ 有两个正的实根 λ_1 和 λ_2 , 且满足 $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2$. 如果我们选取 $\lambda_1 \leq \lambda \leq \lambda_2$, 则使得 $f \cdot n \leq 0$.

从上面的分析知道, 对于鞍点 $(1,0)$ 而言, 总存在一个不稳定流形分枝, 使得系统(5)有沿该不稳定流形又连接平衡点 $(0,0)$ 和 $(1,0)$ 的异宿轨道存在.

情况2 当 $\tau \neq 0$ 时, 我们将证明系统(2)对于充分小的 τ 也存在着行波解. 对于系统(2)而言, 若有 $u(x, t) = \zeta(z), v(x, t) = \xi(z), z = x+ct$, 则可以得到关于变量 ζ, ξ 的行波方程如下

$$\begin{cases} \zeta'' - \zeta' + r\zeta[1 + \alpha\zeta - \beta\zeta^2 - (1 + \alpha - \beta)\xi] = 0, \\ \xi'' - c\xi + \frac{1}{\tau}(\zeta - \xi) = 0, \end{cases} \quad (6)$$

并且满足边界条件

$$\zeta(-\infty) = 0, \quad \zeta(+\infty) = 1, \quad \xi(-\infty) = 0, \quad \xi(+\infty) = 1.$$

为了得到(6)的解, 我们需要令 $\zeta' = \tilde{\zeta}$, $\xi' = \tilde{\xi}$, 并把(6)转化为一个四变量的系统

$$\begin{cases} \zeta' = \tilde{\zeta}, \\ \tilde{\zeta}' = c\zeta' - r\zeta[1 + \alpha\zeta - \beta\zeta^2 - (1 + \alpha - \beta)\xi], \\ \xi' = \tilde{\xi}, \\ \tilde{\xi}' = c\xi' - \frac{1}{\tau}(\zeta - \xi), \end{cases} \quad (7)$$

显然, 系统(7)有两个平衡点 $(0,0,0,0)$ 和 $(1,0,1,0)$.

若引进小参数 $\varepsilon = \sqrt{\tau}$, 并且设 $u = \zeta$, $\tilde{u} = \tilde{\zeta}$, $v = \xi$, $\tilde{v} = \varepsilon\tilde{\xi}$, 则系统(7)变为

$$\begin{cases} u' = \tilde{u}, \\ \tilde{u}' = c\tilde{u} - ru[1 + \alpha u - \beta u^2 - (1 + \alpha - \beta)v], \\ \varepsilon v' = \tilde{v}, \\ \varepsilon \tilde{v}' = \varepsilon c\tilde{v} - (u - v). \end{cases} \quad (8)$$

值得注意的是, 当 $\varepsilon = 0$ 时, 系统(8)等价于系统(5). 于是, 结合定理1, 我们知道, 当 $\varepsilon = 0$ 时系统(8)存在波前解. 但是, 在 $\varepsilon > 0$ 且充分小的情况下系统(8)是否还能保持这种形式解的存在性呢? 为了解决这个问题, 我们首先需要证明当 $\varepsilon > 0$ 时, 系统(8)并不是一个定义在 \mathbf{R}^4 上的动力系统. 为此, 我们需要做如下变换

$$z = \varepsilon\eta.$$

在此变换下, 系统(8)变为

$$\begin{cases} u' = \varepsilon\tilde{u}, \\ \tilde{u}' = \varepsilon c\tilde{u} + \varepsilon ru[1 + \alpha u - \beta u^2 - (1 + \alpha - \beta)v], \\ v' = \tilde{v}, \\ \tilde{v}' = \varepsilon c\tilde{v} + (v - u). \end{cases} \quad (9)$$

系统(9)通常称为快变系统. 需要注意的是, 当 $\varepsilon > 0$ 时, 快变系统(9)和慢变系统(8)是等价的.

当 $\varepsilon = 0$ 时, 系统(8)的流被限制在如下的2维不变流形 M_0 上,

$$M_0 = \{(u, \tilde{u}, v, \tilde{v}) \in \mathbf{R}^4 : \tilde{v} = 0, u = v\}.$$

如果此2维不变流形 M_0 是双曲的, 那么当 $\tau > 0$ 时就存在一个接近流形 M_0 的不变流形 M_ε , 使得系统(8)在不变流形 M_ε 上约化为一个2维系统.

再结合 Fenichel 的理论, 我们知道要得到系统(8)的双曲性, 就必须使得系统(9)的线性化部分的特征值在虚轴上的个数恰好等于流形 M_0 的维数 $\dim M_0$. 经过简单的计算, 我们知道系统(9)在流形 M_0 上的线性化部分为

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

显然, 上面的矩阵的4个特征值分别为0、0、1、-1. 于是, 我们知道有两个特征值在纯虚轴上, 并且其他特征值具有非零的实部. 从而得到流形 M_0 的双曲性. 依据几何奇异摄动理论, 我们知道系统(8)的不变流形 M_ε 可写为如下形式

$$M_\varepsilon = \{(u, \tilde{u}, v, \tilde{v}) \in \mathbf{R}^4 : \tilde{v} = g(u, \tilde{u}, \varepsilon), v = u + h(u, \tilde{u}, \varepsilon)\},$$

其中函数 g 、 h 满足如下条件

$$g(u, \tilde{u}, 0) = h(u, \tilde{u}, 0) = 0. \quad (10)$$

于是, 函数 g 、 h 关于 ε 展开成泰勒级数的形式

$$g(u, \tilde{u}, \varepsilon) = \varepsilon g_1 + \varepsilon^2 g_2 + \dots, \quad h(u, \tilde{u}, \varepsilon) = \varepsilon h_1 + \varepsilon^2 h_2 + \dots. \quad (11)$$

从上面的分析, 我们知道系统(8)在不变流形 M_ε 上的约化为一个2维的系统. 这样, 我们下面的主要任务就是根据式(10)和式(11)来得到函数 g 、 h 的表达式. 注意到, M_ε 是系统(8)的不变流形, 于是对方程 $v = u + h(u, \tilde{u}, \varepsilon)$ 两边关于行波变量 z 求导得

$$\left(1 + \frac{\partial h}{\partial u}\right)u'_z + \frac{\partial h}{\partial \tilde{u}}\tilde{u}'_z = v'_z. \quad (12)$$

把式(12)带入系统(8), 并限制在流形 M_ε 上, 可得

$$\varepsilon \left[\left(1 + \frac{\partial h}{\partial u}\right)\tilde{u} + \frac{\partial h}{\partial \tilde{u}}(c\tilde{u} - ru - \alpha ru^2 + \beta ru^3 + (1 + \alpha - \beta)ru(u + h)) \right] = g. \quad (13)$$

同时结合 $\tilde{v} = g(u, \tilde{u}, \varepsilon)$ 和系统(8), 我们有

$$\varepsilon \left[\frac{\partial g}{\partial u}\tilde{u} + \frac{\partial g}{\partial \tilde{u}}(c\tilde{u} - ru - \alpha ru^2 + \beta ru^3 + (1 + \alpha - \beta)ru(u + h)) \right] = c\varepsilon g + h. \quad (14)$$

再把式(11)带入式(13)和式(14), 整理比较关于 ε 和 ε^2 的系数, 可得到

$$\begin{aligned} g_1(u, \tilde{u}) &= \tilde{u}, & g_2(u, \tilde{u}) &= 0, \\ h_1(u, \tilde{u}) &= 0, & h_2(u, \tilde{u}) &= -ru - \alpha ru^2 + \beta ru^3 + (1 + \alpha - \beta)ru^2. \end{aligned}$$

这样, 我们可以得到函数 g 、 h 的表达式分别为

$$g(u, \tilde{u}, \varepsilon) = \varepsilon \tilde{u} + o(\varepsilon), \quad (15)$$

$$h(u, \tilde{u}, \varepsilon) = (-ru - \alpha ru^2 + \beta ru^3 + (1 + \alpha - \beta)ru^2)\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2).$$

有了函数 g 、 h 的近似表达式, 下面主要考虑在流形 M_ε 上, 系统(8)变为

$$\begin{cases} u'_z = \tilde{u}, \\ \tilde{u}'_z = c\tilde{u} - ru - \alpha ru^2 + \beta ru^3 + (1 + \alpha - \beta)ru(u + h), \end{cases} \quad (16)$$

其中 h 由式(15)给出. 特别地, 当 $\varepsilon = 0$ 时, 系统(16)等价于系统(5); 当 $\varepsilon > 0$ 时, 系统(16)有两个平衡点 $(0, 0)$ 和 $(1, 0)$. 由定理1我们知道, 当 $\varepsilon = 0$ 时, 系统(16)存在连接该两平衡点的异宿轨道. 为了使得当 $\varepsilon > 0$ 时, 系统(16)也存在连接该两平衡点的异宿轨道, 我们需要找

到系统(5)解的摄动也满足系统(16)即可. 为此, 设 (u_0, \tilde{u}_0) 为系统(16)在 $\varepsilon = 0$ 时的解, 那么当 $\varepsilon > 0$ 且充分小的时候, 令

$$\begin{cases} u = u_0 + \varepsilon^2 u_1 + \dots, \\ \tilde{u} = \tilde{u}_0 + \varepsilon^2 \tilde{u}_1 + \dots, \end{cases} \quad (17)$$

把式(17)带入系统(16)得到关于 u_1 和 \tilde{u}_1 的微分方程如下

$$\frac{d}{dz} \begin{pmatrix} u_1 \\ \tilde{u}_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ G(u_0) & -c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \tilde{u}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ H(u_0) \end{pmatrix}, \quad (18)$$

其中

$$\begin{aligned} G(u_0) &= r + 2r\alpha u_0 - 3r\beta u_0^2 - 2r(1 + \alpha - \beta)u_0, \\ H(u_0) &= r(1 + \alpha - \beta)u_0(-ru_0 - \alpha ru_0^2 + \beta ru_0^3 + r(1 + \alpha - \beta)u_0^2). \end{aligned}$$

通过以上的分析, 我们可得到如下的结论.

定理 1.2 对于任意给定的 $c \geq \max\left\{2\sqrt{r}, (1 + \beta)\sqrt{\frac{r}{\beta}}\right\}$, 当 $\tau > 0$ 时, 系统(1)存在行波解 $u(x, t) = \varphi(x + ct)$, 且满足 $\varphi(-\infty) = 0$ 和 $\varphi(+\infty) = 1$.

证 明 设 L^2 为平方可积的函数空间, 且有如下形式的内积

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (y(s), m(s)) ds,$$

其中 (\cdot, \cdot) 表示欧几里得空间 \mathbf{R}^2 上的内积. 由 Fredholm 理论, 我们知道系统(18)有解当且仅当条件

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(y(z), \begin{pmatrix} 0 \\ H(u_0) \end{pmatrix} \right) dz = 0,$$

对所有的函数 $y(z)$ 被满足. $y(z)$ 表示系统(18)左端的算子 ℓ 的共轭算子 ℓ^* 核空间中的元素. 系统(18)左端的算子 ℓ 的共轭算子 ℓ^* 可表示为

$$\ell^* = -\frac{d}{dz} + \begin{pmatrix} 0 & G(u_0) \\ -1 & -c \end{pmatrix}.$$

于是, 为了得到 $\text{Ker}\ell^*$, 我们必须使得对所有的 $y(z)$ 满足如下条件

$$\frac{dy(z)}{dz} = \begin{pmatrix} 0 & G(u_0) \\ 1 & -c \end{pmatrix} y(z). \quad (19)$$

对于系统(19)而言, 由于其系数矩阵是一个非常数矩阵, 所以很难找到其一般形式的解. 然而, 我们只需要找满足 $y(\pm\infty) = 0$ 的解. 但是, 只有零解才符合这种条件. 注意到 $u_0(z)$ 为未扰动问题的解, 虽然我们不知道 $u_0(z)$ 的具体表达式, 但是我们知道当 $z \rightarrow -\infty$ 时, $u_0(z) \rightarrow 0$. 于是在系统(19)中, 令 $z \rightarrow -\infty$, 则系统(19)中的系数矩阵为常数矩阵, 其特征值满足方程 $\lambda^2 + c\lambda + r = 0$. 进而可得, 当 $c \geq 2\sqrt{r}$ 时, 系统(19)的系数矩阵的特征值均为负实数. 因此, 当 $z \rightarrow -\infty$ 时, 系统(19)的任何不同于零的解必将以指数形式增长. 这样, 只有零解满足 $y(\pm\infty) = 0$. 这意味着 Fredholm 正交性条件成立, 也就是说系统(18)的解存在并

且满足 $u_1(\pm\infty) = 0$ 和 $\tilde{u}_1(\pm\infty) = 0$. 也就是当 $\varepsilon > 0$ 充分小的时候, 系统(16)存在连接两平衡点 $(0,0)$ 和 $(1,0)$ 的异宿轨道. 更进一步可得, 当 $\tau > 0$ 且充分小的时候, 系统(7)存在连接平衡点 $(0,0,0)$ 和 $(1,0,1,0)$ 的异宿轨道. 综上可知, 当 $\tau > 0$ 且充分小时, 系统(1)存在着波前解 $u(x, t) = \phi(x + ct)$, 且满足 $\varphi(-\infty) = 0$ 和 $\varphi(+\infty) = 1$.

2 数值模拟

为了验证上面的理论分析和验证时滞对行波解动力学行为的影响, 借助数值方法来对系统(2)进行验证. 选取1维的空间来反应该种群在空间的分布状况. 在所有的数值结果中, 系统的边界条件为Neumann边界条件且空间范围为 $0 \sim 1000$, 时间方向上的范围为 $0 \sim 300$, 且空间步长 $\Delta x = 1$, 时间步长 $\Delta t = 0.05$, 并且初始条件为在系统最大状态上的扰动. 当取系统参数为: $d = 1$ 、 $r = 3$ 、 $\alpha = 0.5$ 、 $\beta = 0.2$ 、 $\tau = 0.05$ 时, 相应的数值结果如图1所示.

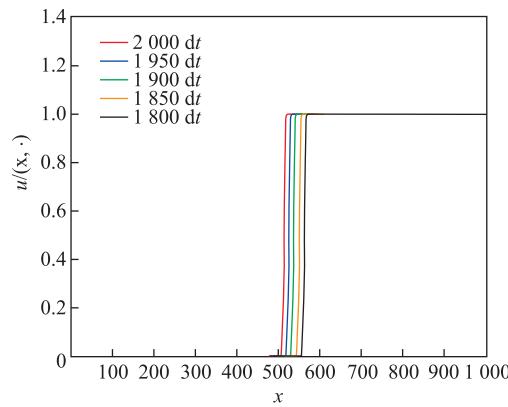


图1 当取 $d = 1$, $r = 3$, $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.2$, $\tau = 0.05$ 时, 系统(1)在不同时刻的波行

Fig. 1 When $d = 1$, $r = 3$, $\alpha = 0.5$, $\beta = 0.2$, $\tau = 0.05$, the wave shape of system (1) at different times

从上面的数值模拟结果表明, 种群模型的时空滞后项中的时滞对该系统的行波动力学行为有着重要的影响. 当时滞量非常小的时候, 系统存在单调递增的波前解. 但是, 随着时滞的增加, 系统行波解的波形也随之发生变化. 当时滞增加到某一数值时, 行波解开始出现振荡衰减到空间均匀状态的情况. 然后当时滞继续增加到某一临界值时, 行波解又开始出现振荡尾巴的现象. 这些结果的生物解释和意义为: 现实生态环境中的种群在一定的情况下, 种群在空间的分布呈现出行波的传播方式, 而且种群个体因食物资源竞争所导致的相互作用时间对种群的空间传播行为有着重要的影响. 当种群因食物资源竞争相互作用的时间比较少时, 种群可以获得快速的增长, 从而有利于种群在空间方向上的传播; 当种群因食物资源竞争相互作用的时间比较大时, 种群的增长受到了抑制, 从而导致种群在空间传播出现振荡的行为. 另外可以借助行波的波速和振幅, 预测种群在空间传播的速度和传播的范围, 为提前做好种群资源的管理, 特别是某些有害入侵物种的控制提供一些理论方面的帮助和指导.

3 结 论

本文主要讨论了一类带时空滞后的单种群模型的行波解模式的存在性, 具体地讲主要做了如下方面的工作: 首先利用奇异几何摄动理论讨论该种群模型在小时滞的情况下波前解的存在性; 然后借助数值计算的方法, 选取合适的系统参数, 来验证前面所得到的理论分

析。以上所得到的结果说明了种群在空间分布的波动行为,也表明了种群随着自身相互作用时间的变化其空间分布的波动行为也随之发生改变。该结果可以为生物学家分析某类入侵种群在空间分布上的传播速度和传播范围提供一定的指导和借鉴。

[参 考 文 献]

- [1] WU J, ZOU X. Travelling wave fronts of reaction diffusion systems with delays [J]. *Journal of Dynamics and Differential Equations*, 2001, 13(3): 651-687.
- [2] ZOU X. Delay induced traveling wave fronts in reaction diffusion equation of Kpp-Fisher type [J]. *Journal of Computation and Applied Mathematics*, 2002, 146(2): 309-321.
- [3] WANG Z C, LI W T, RUAN S G. Traveling wave fronts in reaction-diffusion systems with spatio-temporal delays [J]. *Journal of Differential Equation*, 2006, 222(1): 185-232.
- [4] LI W T, RUAN S G, WANG Z C. On the diffusive Nicholson's blowflies equation with nonlocal delay [J]. *Journal of Nonlinear Science*, 2007, 17(6): 505-525.
- [5] WANG Z, LI W, RUAN S. Existence and stability of traveling wave fronts in reaction advection diffusion equations with nonlocal delay [J]. *Journal of Differential Equations*, 2007, 238(1): 153-200.
- [6] LI W T, LIN G, RUAN S G. Existence of travelling wave solution in delayed reaction diffusion systems with applications to diffusion competition systems [J]. *Nonlinearity*, 2006, 19(6): 1253-1273.
- [7] ZHANG J M, PENG Y H. Travelling waves of the diffusive Nicholson's blowflies equation with strong generic delay kernel and non-local effect [J]. *Nonlinear Analysis*, 2008, 68(5): 1263-1270.
- [8] FENICHEL N. Geometric singular perturbation theory for ordinary differential equations [J]. *Journal Differential Equations*, 1979, 31(1): 53-98.
- [9] SHERRATT J A. Invading wave fronts and their oscillatory wakes are linked by a modulated travelling phase resetting wave [J]. *Physica D*, 1998, 117(1): 145-166.
- [10] BRITTON N F. Aggregation and the competitive exclusion principle [J]. *Journal of theoretical biology*, 1989, 136(1): 57-66.

(责任编辑: 林 磊)