

文章编号: 1000-5641(2019)01-0001-12

一类截尾稳定过程驱动的 SIS 传染病模型

张振中, 张 权, 杨红倩, 张恩华

(东华大学 应用数学系, 上海 201620)

摘要: 考虑一类由谱正 α -稳定过程驱动的 SIS (易感-感染-易感) 模型. 首先证明了全局正解的存在唯一性; 其次, 利用 Khasminskii 引理和 Lyapunov 方法, 得到了平稳分布存在唯一性的条件, 并证明了模型的指数遍历性; 最后, 给出了模型灭绝的条件.

关键词: 谱正 α -稳定过程; 平稳分布; 指数遍历性; 灭绝性

中图分类号: O211.63 **文献标志码:** A **DOI:** 10.3969/j.issn.1000-5641.2019.01.001

An SIS epidemic model driven by a class of truncated stable processes

ZHANG Zhen-zhong, ZHANG Quan, YANG Hong-qian, ZHANG En-hua

(Department of Applied Mathematics, Donghua University, Shanghai 201620, China)

Abstract: A susceptible-infected-susceptible (SIS) epidemic model driven by spectrally positive α -stable processes is considered. Firstly, the uniqueness and the existence of the global positive solution are proved. Next, by using Khasminskii's lemma and the Lyapunov method, conditions for the existence of a unique stationary distribution are given. In addition, the model is shown to be exponentially ergodic. Finally, conditions for extinction of the model are given.

Keywords: spectrally positive α -stable processes; stationary distribution; exponential ergodicity; extinction

0 引 言

传染病是一种可以从一个人或其他物种, 经过各种途径传染给另一个人或物种的感染病. 每年有大量人口死于传染性疾病. 据世界卫生组织报告显示, 每年大约有 100 万人死于艾滋病^[1], 140 万人死于肺结核^[2]. 在传染病的研究中, 数学模型一直发挥着重要作用. 近年来, 许多研究人员建立了一些数学模型来研究传染病的传播. 1927年, Kermack 等^[3]首次提出了 SIR (易感-感染-康复) 模型来研究传染病的传播. 该模型将人群分为易感人群 (S), 感染人群 (I) 以及康复人群 (R). 模型中的个体在最初属于易感人群, 在某个时间点感染疾病变为感染人群, 经过一段时间之后变为康复人群并免疫疾病. 然而由于大多数疾病并不能完全免疫, 所以不同于 SIR 模型, 传染病模型中另一个典型的模型为 SIS 模型. 此时疾病的传播方

收稿日期: 2017-12-08

基金项目: 教育部人文社会科学研究规划基金(17YJA910004)

第一作者: 张振中, 男, 副教授, 研究方向为随机分析及其应用. E-mail: zzzhang@dhu.edu.cn.

式为: 易感者在某个时期感染疾病, 经过治疗后康复重新成为易感者. 为研究此类疾病, 1984 年, Hethcote 和 Yorke^[4]提出了如下 SIS 模型.

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = \mu N - \beta S(t)I(t) + \gamma I(t) - \mu S(t), \\ \frac{dI(t)}{dt} = \beta S(t)I(t) - (\mu + \gamma)I(t), \end{cases} \quad (1)$$

其中: $N = S(0) + I(0)$ 为总人数; μ 为死亡率; γ 为治愈率; β 为疾病的传染率. 在实际生活中, 由于环境的不确定性, 传染病模型也在发生变化, 这就需要在原有的确定性模型基础上加入环境的随机因素, 使得模型能够更好地反映疾病发展的实际变化情况. 对此, 许多研究人员使用布朗运动来描述环境的随机性. 2011 年, Gray 等^[5]将模型 (1) 中的参数 β 进行随机化

$$\tilde{\beta} dt = \beta dt + \sigma dB(t), \quad (2)$$

其中 $B(t)$ 为标准布朗运动, 则上述确定性 SIS 模型 (1) 转化成如下随机形式

$$\begin{cases} dS(t) = (\mu N - \beta S(t)I(t) + \gamma I(t) - \mu S(t)) dt - \sigma S(t)I(t) dB(t), \\ dI(t) = (\beta S(t)I(t) - (\mu + \gamma)I(t)) dt + \sigma S(t)I(t) dB(t). \end{cases} \quad (3)$$

模型 (3) 在几乎处处意义下有全局正解, 且在随机噪声较小时具有唯一的平稳分布; 在随机噪声较大时感染者会以概率 1 灭绝. 然而, 人口数量经常会受到环境因素 (例如地震, 洪水, 移民等) 的影响而在一瞬间发生剧烈变化. 许多实际数据显示, 这种剧烈变化服从一类幂律分布. 例如, Richardson^[6]在研究 1820 年至 1945 年间世界的战争伤亡人数时发现, 伤亡人数服从一类幂律分布. Brockmann 等^[7]发现, 人类的短期旅行行为可以由距离的递减幂律来刻画. 令 X_i 表示人口数量第 i 次跳跃的大小. 假设 X_i ($i \geq 1$) 为一列独立同分布的随机变量, 并且其分布为方差无限的幂律分布, 则由广义中心极限定理^[8]可知, X_i ($i \geq 1$) 的和趋向于参数为 α 的稳定分布. 因此, 为了能够刻画人口的剧烈波动, 我们将模型 (3) 中布朗运动 $B(t)$ 用 α -稳定过程 ($Z(t)$) 来代替, 即

$$\begin{cases} dS(t) = (\mu N - \beta S(t)I(t) + \gamma I(t) - \mu S(t)) dt - \sigma S(t)I(t) dZ(t), \\ dI(t) = (\beta S(t)I(t) - (\mu + \gamma)I(t)) dt + \sigma S(t)I(t) dZ(t). \end{cases} \quad (4)$$

比较模型 (4) 与模型 (3), 人们自然会问第一个问题: 在什么条件下, 模型 (4) 具有与模型 (3) 相同的一些性质? 更进一步, 注意到当 α 趋于 2 时, 稳定过程渐近趋向于布朗运动. 因此, 当 $\alpha = 2$ 时, 模型 (4) 即变为模型 (3), 则人们会问第二个问题: 模型 (4) 的结果是否可以覆盖模型 (3)? 本文主要研究以上两个问题. 另外, 考虑到一些环境因素会使得疾病突然爆发, 导致感染者数量剧烈增加, 本文研究仅有正跳的 α -稳定过程 ($Z(t)$), 即谱正 α -稳定过程. 其对应的 Lévy 测度 ν 为

$$\nu(dz) = \begin{cases} \frac{C_\alpha I_{\{z>0\}}}{z^{1+\alpha}} dz, & \text{若 } z \neq 0, \\ 0, & \text{若 } z = 0, \end{cases}$$

其中: $C_\alpha = \frac{\alpha 2^{\alpha-1} \Gamma((1+\alpha)/2)}{\pi^{1/2} \Gamma(1-\alpha/2)}$; $\Gamma(\cdot)$ 为 Gamma 函数, 定义如下.

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1} \exp(-t) dt, \quad s \in \mathbb{R}_+,$$

其中 \mathbb{R} 和 \mathbb{R}_+ 分别表示实数集及正实数集.

由于 $N = S(t) + I(t)$, 代入式 (4) 得到

$$dI(t) = I(t)[(\beta N - \mu - \gamma - \beta I(t)) dt + \sigma(N - I(t)) dZ(t)]. \quad (5)$$

为方便描述, 将 $I(t)$ 替换为 $x(t)$, 则有

$$dx(t) = x(t)(\beta N - \mu - \gamma - \beta x(t)) dt + \sigma(N - x(t))x(t) dZ(t). \quad (6)$$

对于传染病模型, $x(t)$ 刻画感染者的人数. 因此, 现实意义要求 $x(t)$ 为正数. 即, 要求对于任意 $x(0) = x > 0$, 都有

$$P(x(t) > 0, t \geq 0) = 1. \quad (7)$$

若一个过程 $(x(t))$ 满足条件(7), 则称该过程具有全局正解.

为了确保所有的样本轨道几乎处处在 $(0, N)$ 内, 整个全文对模型参数与跳分布假设如下.

(A1) $\beta > 0, \mu > 0, \sigma > 0, \alpha \in (0, 2)$;

(A2) 总人数 N 充分大, 且满足 $\sigma N > 1$;

(A3) Lévy 测度 $\nu(z)$ 的大跳有上界. 即跳跃高度 z 满足 $0 < z < \frac{1}{2\sigma N}$.

对于研究 SIS 传染病模型, 一个很重要的内容是基于感染者的历史观测值, 预测感染者的未来人数的区间估计. 由于历史数据为时间序列的数据, 一般不相互独立. 一个自然的问题是, 在什么条件下这些时间数据近似同分布? 精确地说, 这些数据的对应过程是否具有平稳性? 进一步, 对应从不同初始值出发, 过程 $(x(t))$ 在什么条件下遍历? 注意到, 如果过程 $(x(t))$ 遍历, 则我们可以利用遍历定理来估计过程的参数. 此外, 如果过程不是遍历的, 过程是否几乎处处收敛到 0? 这在传染病模型中, 称之为几乎处处灭绝.

综上所述, 本文的主要目的是研究以下 3 个问题.

(1) 在什么条件下, 模型 (6) 有唯一全局正解?

(2) 在什么条件下, 模型 (6) 有唯一的平稳分布且指数遍历?

(3) 在什么条件下, 当 t 趋近无穷时, t 时刻的感染者 $x(t)$ 以概率 1 趋近于灭绝?

本文将部分回答以上 3 个问题.

1 全局正解

令 $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, P)$ 是一个完备的概率空间, 其中域流 $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ 是右连续的且 \mathcal{F}_0 包含所有的 P -零测集. 记 $x(t-) := \lim_{s \rightarrow 0^-} x(t+s)$.

引理 1 若假设(A1)—(A3)成立. 对于任意初始值 $x(0) = x_0 \in (0, N)$, 任意跳时刻 t_0 , 若 $x(t_0-) \in (0, N)$, 则跳跃后状态 $x(t_0)$ 几乎处处在 $(0, N)$ 内.

证 明 因为 t_0 为稳定过程的一个跳跃时刻, 根据方程 (6), 则有

$$x(t_0) = x(t_0-) + \sigma(N - x(t_0-))x(t_0-)\Delta Z(t_0-),$$

这里 $\Delta Z(t_0-) = Z(t_0) - Z(t_0-)$ 为时刻 t_0 的跳跃高度. 再由基本假设, 知

$$\Delta Z(t_0-) < \frac{1}{\sigma N}.$$

因此, 几乎处处有

$$\sigma(N - x(t_0-))x(t_0-)\Delta Z(t_0-) < N - x(t_0-).$$

即 $x(t_0) < N$ 几乎处处成立. 又由于 t_0 的任意性, 知引理成立.

定理 1 若假设 (A1)—(A3) 成立, 则对于任意初始值 $x(0) \in (0, N)$, 模型 (6) 存在一个唯一的全局正解 $x(t) \in (0, N)$, 即

$$P\{x(t) \in (0, N), t \geq 0\} = 1.$$

证 明 将式 (6) 视为一个 \mathbb{R} 上的随机微分方程, 注意到该方程的系数满足局部 Lipschitz 条件. 由 Mao^[9] 知, 对于任意给定的初始值 $x(0) \in (0, N)$, 方程在 $t \in [0, \tau_e)$ 上存在唯一的极大局部解 $x(t)$, 其中, τ_e 为爆炸时间^[10]. 设 k_1 是充分大的正整数, 并满足条件 $\frac{1}{k_1} < x(0) < N - \frac{1}{k_1}$. 对任意整数 $k \geq k_1$, 定义停时

$$\tau_k = \inf \left\{ t \in [0, \tau_e) : x(t) \notin \left(\frac{1}{k}, N - \frac{1}{k} \right) \right\}.$$

显然, τ_k 随着 $k \rightarrow \infty$ 单调递增. 令

$$\tau_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} \tau_k,$$

则 $\tau_\infty \leq \tau_e$ 几乎必然成立. 若可以证明 $\tau_\infty = \infty$ 几乎必然成立, 则有 $\tau_e = \infty$ 几乎必然成立, 进而可得 $x(t) \in (0, N), t \geq 0$, 几乎必然成立.

使用反证法, 假设 $\tau_\infty \neq \infty$, 则存在 $T > 0, \epsilon \in (0, 1)$, 使得

$$P\{\tau_\infty \leq T\} > \epsilon.$$

即存在整数 $k_2 \geq k_1$, 使得对任意的 $k \geq k_2$, 有

$$P\{\tau_k \leq T\} \geq \epsilon. \quad (8)$$

首先, 考虑如下 Lyapunov 函数

$$V(x) = \frac{1}{N-x} + \frac{1}{x}, \quad x \in (0, N).$$

对过程 $(x(t))$ 使用 Itô 公式^[11], 可得

$$EV(x(t \wedge \tau_k)) = V(x(0)) + E \int_0^{t \wedge \tau_k} LV(x(s))ds, \quad t \in [0, T], k \geq k_2, \quad (9)$$

其中,

$$\begin{aligned} LV(x) = & \left(\frac{1}{(N-x)^2} - \frac{1}{x^2} \right) x(\beta N - \mu - \gamma - \beta x) + \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{x + \sigma x(N-x)z} - \frac{1}{x} \right. \\ & + \frac{1}{N-x - \sigma x(N-x)z} - \frac{1}{N-x} - \frac{\sigma(N-x)}{x} z I_{\{0 < z \leq 1\}} \\ & \left. + \frac{\sigma x}{N-x} z I_{\{0 < z \leq 1\}} \right) \nu(dz). \end{aligned} \quad (10)$$

记

$$\begin{aligned} A_1(x) &= \int_0^1 \frac{1}{x} \left(\frac{1}{1 + \sigma(N-x)z} - 1 + \sigma(N-x)z \right) \nu(dz), \\ A_2(x) &= \int_1^{+\infty} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{1 + \sigma(N-x)z} - 1 \right) \nu(dz), \\ C_1(x) &= \int_0^1 \frac{1}{N-x} \left(\frac{1}{1 - \sigma x z} - 1 - \sigma x z \right) \nu(dz), \\ C_2(x) &= \int_1^{+\infty} \frac{1}{N-x} \left(\frac{1}{1 - \sigma x z} - 1 \right) \nu(dz), \end{aligned}$$

则有

$$LV(x) = \left(\frac{1}{(N-x)^2} - \frac{1}{x^2} \right) x(\beta N - \mu - \gamma - \beta x) + A_1(x) + A_2(x) + C_1(x) + C_2(x). \quad (11)$$

由假设 (A1)—(A3), 积分项 $A_2(x) \equiv 0, C_2(x) \equiv 0$.

对积分 $A_1(x)$ 作变量代换 $y = \sigma(N-x)z$, 根据假设 (A1)—(A3), 有

$$A_1(x) = \frac{\sigma^\alpha (N-x)^\alpha}{x} \int_0^{\frac{N-x}{2N}} \left(\frac{1}{1+y} - 1 + y \right) \frac{C_\alpha}{y^{\alpha+1}} dy. \quad (12)$$

令

$$B_1(y) = \frac{(1+y)^{-1} - 1 + y}{y^2},$$

则

$$B_1(y) = \frac{1}{1+y}.$$

由函数 $B_1(y)$ 在区间 $(0, \frac{N-x}{2N})$ 单调递减, 则有

$$A_1(x) = \frac{\sigma^\alpha (N-x)^\alpha}{x} \int_0^{\frac{N-x}{2N}} B_1(y) \frac{C_\alpha}{y^{\alpha-1}} dy < \frac{1}{x} \cdot \frac{C_\alpha \sigma^\alpha (N-x)^2}{(2-\alpha)(2N)^{2-\alpha}}. \quad (13)$$

类似积分项 $A_1(x)$, 对积分 $C_1(x)$ 作变量代换 $y = \sigma x z$, 根据假设 (A1)—(A3), 有

$$C_1(x) = \frac{\sigma^\alpha x^\alpha}{N-x} \int_0^{\frac{x}{2N}} \left(\frac{1}{1-y} - 1 - y \right) \frac{C_\alpha}{y^{\alpha+1}} dy. \quad (14)$$

令

$$D_1(y) = \frac{(1-y)^{-1} - 1 - y}{y^2} = \frac{1}{1-y},$$

则对任意 $y \in (0, \frac{x}{2N})$, $x > 0$, 有

$$D_1(y) < \frac{2N}{2N-x}. \quad (15)$$

因此,

$$C_1(x) = \frac{\sigma^\alpha x^\alpha}{N-x} \int_0^{\frac{x}{2N}} D_1(y) \frac{C_\alpha}{y^{\alpha-1}} dy \leq \frac{1}{N-x} \cdot \frac{C_\alpha \sigma^2}{(2N)^{1-\alpha}(2-\alpha)} \cdot \frac{x^2}{2N-x}.$$

令 $g(x) = \frac{x^2}{2N-x}$. 易知 $g(x)$ 在区间 $(0, N)$ 单调递增. 对任意 $x \in (0, N)$, 有

$$g(x) < g(N) = N.$$

因此,

$$C_1(x) \leq \frac{1}{N-x} \cdot \frac{C_\alpha \sigma^2 N^\alpha}{2^{1-\alpha}(2-\alpha)}. \quad (16)$$

将式 (13)、(16) 代入式 (11), 得到

$$LV(x) < \frac{\mu + \gamma}{x} + \frac{\beta N}{N-x} + \frac{1}{x} \cdot \frac{C_\alpha \sigma^\alpha N^\alpha}{(2-\alpha)2^{2-\alpha}} + \frac{1}{N-x} \cdot \frac{C_\alpha \sigma^2 N^\alpha}{(2-\alpha)2^{1-\alpha}}.$$

由上式知, 存在常数 $\tilde{C} > 0$, 使得

$$LV(x) < \tilde{C}V(x), \quad x \in (0, N), \quad (17)$$

其中, $\tilde{C} = (\mu + \gamma) \vee (\beta N) \vee \frac{C_\alpha \sigma^\alpha N^\alpha}{(2-\alpha)2^{2-\alpha}} \vee \frac{C_\alpha \sigma^2 N^\alpha}{(2-\alpha)2^{1-\alpha}}$. 将式 (17) 代入式 (9), 可得

$$EV(x(T \wedge \tau_k)) \leq V(x(0)) + \tilde{C}E \int_0^{T \wedge \tau_k} V(x(s))ds < V(x(0)) + \tilde{C} \int_0^T EV(x(s \wedge \tau_k))ds. \quad (18)$$

再由 Gronwall 不等式, 知

$$EV(x(T \wedge \tau_k)) < V(x(0)) \exp(\tilde{C}T).$$

令 $\Omega_k = \{\tau_k \leq T\}$, $k \geq k_2$, 则由式 (8) 得到

$$P(\Omega_k) \geq \epsilon. \quad (19)$$

注意到, 对任意 $\omega \in \Omega_k$, 由引理 1 与 τ_k 的定义, 有

$$x(\tau_k, \omega) \leq \frac{1}{k} \quad \text{或} \quad N - \frac{1}{k} < x(\tau_k, \omega) < N.$$

因此,

$$V(x(\tau_k, \omega)) \geq k.$$

则由式 (18) 和式 (19) 得到

$$V(x(0)) \exp(\tilde{C}T) > E[I_{\Omega_k}(\omega)V(x(\tau_k, \omega))] \geq P(\Omega_k)k \geq \epsilon k.$$

当 $k \rightarrow \infty$ 时得到矛盾

$$\infty > V(x(0)) \exp(\tilde{C}T) > \infty.$$

因此 $\tau_\infty = \infty$ 几乎必然成立. 证毕.

2 平稳分布

定义 1^[12] 设 $(x(t))$ 是一个马尔可夫过程. 令 $\pi(x) = P(x(0) \leq x)$. 若对任意时间 t , 过程 $(x(t))$ 的分布为 $\pi(x)$ 不变, 则称 $\pi(x)$ 为过程 $(x(t))$ 的平稳分布. 令 $P(t, x, A) = P(x(t) \in A | x(0) = x)$ 为马尔可夫过程 $(x(t))$ 的转移概率函数. 若平稳分布 $\pi(x)$ 可微, 则平稳分布 $\pi(x)$ 满足

$$\pi(A) = P(x(0) \in A) = P(x(t) \in A) = \int_P (t, x, A) d\pi(x), \quad \forall t \geq 0.$$

引理 2 若存在一个有界的开区域 $U \subset (0, N)$ 使得其闭包 $\bar{U} \subset (0, N)$, 并且满足如下条件.

$$(B1) \inf_{x \in U} \sigma^2 x^2 (N - x)^2 > 0,$$

$$(B2) \text{ 对任意紧集 } G \subseteq (0, N), U \subseteq G, \text{ 有 } \sup_{x(0) \in G-U} E\tau_U < \infty, \text{ 其中 } \tau_U = \inf\{t \geq 0, x(t) \in U\},$$

则模型 (6) 有唯一的平稳分布.

证 明 引理的证明类似于文献 [13] 中定理 4.1 或文献 [14] 中引理 3.1 的证明. 基于跳过程的最大值原理与 Lévy 系统公式^[15-16], 不难证明本引理. 此处省略.

定理 2 若假设 (A1)–(A3) 成立且 $\beta N - \mu - \gamma - \frac{N^2 \sigma^\alpha C_\alpha}{(2-\alpha)(2N)^{2-\alpha}} > 0$, 则模型 (6) 存在唯一的平稳分布.

证 明 在区间 $(0, N)$ 内选取两个正数 a, b , 即 $0 < a < b < N$. 令

$$U = \{x \in (0, N) : a < x < b\}.$$

首先, 显然有 $\inf_{x \in U} \sigma^2 x^2 (N - x)^2 > 0$ 满足引理 2 中条件 (B1), 接下来证明条件 (B2). 考虑非负函数

$$V(x) = x^\theta + x^{-1}, \quad x \in (0, N), \quad (20)$$

其中 $\theta \in (0, \min\{1, \alpha\})$. 则

$$\begin{aligned} LV(x) &= (\theta x^{\theta-1} - x^{-2}) x(\beta N - \mu - \gamma - \beta x) + \int_0^{+\infty} \left((x + \sigma x(N-x)z)^\theta - x^\theta \right. \\ &\quad \left. + (x + \sigma x(N-x)z)^{-1} - x^{-1} - \sigma x(N-x)(\theta x^{\theta-1} - x^{-2}) z I_{\{0 < z \leq 1\}} \right) \nu(dz). \end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned} A(x) &= (\theta x^{\theta-1} - x^{-2}) x(\beta N - \mu - \gamma - \beta x), \\ B(x) &= \int_0^1 \left((x + \sigma x(N-x)z)^\theta - x^\theta - \sigma x(N-x)\theta x^{\theta-1} z \right) \nu(dz) \\ &\quad + \int_1^{+\infty} \left((x + \sigma x(N-x)z)^\theta - x^\theta \right) \frac{C_\alpha dz}{z^{\alpha+1}}, \\ C(x) &= \int_0^1 \left((x + \sigma x(N-x)z)^{-1} - x^{-1} + \sigma x(N-x)x^{-2} z \right) \nu(dz) \\ &\quad + \int_1^{+\infty} \left((x + \sigma x(N-x)z)^{-1} - x^{-1} \right) \nu(dz), \end{aligned}$$

则有

$$LV(x) = A(x) + B(x) + C(x). \quad (21)$$

对于 $B(x)$, 由假设 (A1)—(A3) 知

$$B(x) = \int_0^1 ((x + \sigma x(N-x)z)^\theta - x^\theta - \sigma x(N-x)\theta x^{\theta-1}z) \nu(\mathrm{d}z).$$

由变量代换 $y = \sigma z$ 得到

$$B(x) = x^\theta \sigma^\alpha \int_0^{\frac{1}{2N}} ((1 + (N-x)y)^\theta - 1 - \theta(N-x)y) \frac{C_\alpha}{y^{\alpha+1}} \mathrm{d}y \quad (22)$$

$$= x^\theta \sigma^\alpha \int_0^{\frac{1}{2N}} \frac{(1 + (N-x)y)^\theta - 1 - \theta(N-x)y}{y^2} \cdot \frac{C_\alpha}{y^{\alpha-1}} \mathrm{d}y. \quad (23)$$

定义

$$D_2(y) = \frac{(1 + (N-x)y)^\theta - 1 - \theta(N-x)y}{y^2}. \quad (24)$$

当 $y \rightarrow 0$ 时得到

$$\lim_{y \rightarrow 0} D_2(y) = \frac{\theta(\theta-1)(N-x)^2}{2}.$$

因此有 $D_2(y)$ 在 $(0, \frac{1}{2N}]$ 上是有界的, 则存在常数 $C_1 > 0$, 使得

$$D_2(y) \leq C_1. \quad (25)$$

将式 (25) 代入式 (22) 得到

$$B(x) \leq x^\theta \sigma^\alpha \int_0^{\frac{1}{2N}} C_1 \frac{C_\alpha}{y^{\alpha-1}} \mathrm{d}y = \frac{C_\alpha \sigma^\alpha x^\theta}{(2-\alpha)(2N)^{2-\alpha}} C_1. \quad (26)$$

对于 $C(x)$, 同样由假设 (A1)—(A3) 知

$$C(x) = \int_0^1 ((x + \sigma x(N-x)z)^{-1} - x^{-1} + \sigma x(N-x)x^{-2}z) \nu(\mathrm{d}z).$$

计算得到

$$C(x) \leq \frac{N^2 \sigma^\alpha C_\alpha}{(2-\alpha)(2N)^{2-\alpha}} x^{-1}. \quad (27)$$

将式 (26) 和式 (27) 代入式 (21), 得到

$$\begin{aligned} LV(x) &\leq (\theta x^\theta - x^{-1}) (\beta N - \mu - \gamma - \beta x) \\ &\quad + \frac{C_\alpha \sigma^\alpha}{(2-\alpha)(2N)^{2-\alpha}} x^\theta C_1 + \frac{N^2 \sigma^\alpha C_\alpha}{(2-\alpha)(2N)^{2-\alpha}} x^{-1} \\ &= \left((\beta N - \mu - \gamma) \theta + \frac{C_\alpha \sigma^\alpha}{(2-\alpha)(2N)^{2-\alpha}} C_1 \right) x^\theta + \beta - \theta \beta x^{\theta+1} \\ &\quad - \left(\beta N - \mu - \gamma - \frac{N^2 \sigma^\alpha C_\alpha}{(2-\alpha)(2N)^{2-\alpha}} \right) x^{-1}. \end{aligned}$$

由假设 $\beta N - \mu - \gamma - \frac{N^2 \sigma^\alpha C_\alpha}{(2-\alpha)(2N)^{2-\alpha}} > 0$ 得到

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} LV(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} LV(x) = -\infty.$$

则存在充分大的 M , 使得

$$LV(x) \leq -1, \quad \text{对所有 } x \in (0, N) - U. \quad (28)$$

又由 Itô 公式得到

$$\begin{aligned} dV(x(t)) = & LV(x(t)) dt + \int_0^{+\infty} \left((x(t) + \sigma x(t)(N - x(t))z)^\theta \right. \\ & \left. + (x(t) + \sigma x(t)(N - x(t))z)^{-1} - x^\theta(t) - x^{-1}(t) \right) \tilde{N}(dt, dz). \end{aligned} \quad (29)$$

令 $\tau_U = \inf\{t \geq 0 : x(t) \in U\}$, 则对任意 $x(0) = x_0 \in (0, N) - U$, 由式 (28)、(29) 与邓肯(Dynkin)公式, 得到

$$0 \leq V(x_0) - E(t \wedge \tau_U | x(0) = x_0), \quad \forall t \geq 0.$$

令 $t \rightarrow +\infty$, 对任意 $x(0) = x_0 \in (0, N) - U$, 得到

$$E(\tau_U | x(0) = x_0) \leq V(x_0) < +\infty.$$

因此引理 2 中条件 (B2) 得证. 证毕.

3 指数遍历性

我们已经证明, 当初始值 x_0 限制在 $(0, N)$ 上, 模型 (6) 具有唯一的平稳分布. 如果将初始值 x_0 取全体实数, 定理 1 的结论不成立. 接下来, 我们讨论收敛速度. 为了方便叙述, 先给出如下定义.

定义 2 $P(t, x, dz)$ 为马尔可夫过程 $(x(t))_{t \geq 0}$ 的转移概率. 若 $\forall x \in (0, N), t > 0$, 存在唯一的不变概率测度 $\pi(\cdot)$, 常数 $k > 0$ 及正的可测函数 $\beta(x)$, 使得

$$\|P(t, x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_{\text{Var}} \leq \beta(x) \exp(-kt),$$

其中 $\|\cdot\|_{\text{Var}}$ 为全变差范数, 则马尔可夫过程 $(x(t))_{t \geq 0}$ 被称为是指数遍历的.

引理 3^[18] 设 $(x(t))_{t \geq 0}$ 为一个马尔可夫过程. 若存在 Lyapunov 函数 $V: (0, N) \rightarrow \mathbb{R}^+$ 及正常数 K, ξ , 使得

$$LV(x) \leq -\xi V(x) + K, \quad \forall x \in (0, N),$$

其中 L 为过程 $(x(t))$ 对应的无穷小生成元, 则过程 $(x(t))$ 是指数遍历的.

注记 我们的遍历定义对初始值是有限制的. 严格来说, 称过程 $(x(t))$ 为“局部指数遍历”更合适.

定理 3 若假设 (A1)—(A3) 成立且 $\beta N - \mu - \gamma - \frac{N^2 \sigma^\alpha C_\alpha}{(2-\alpha)(2N)^{2-\alpha}} > 0$, 则模型 (6) 是指数遍历的.

证 明 考虑非负函数

$$V(x) = \ln(1+x) + x^{-1}, \quad x \in (0, N).$$

利用定理 1 和定理 2 的计算方法, 易证明, 存在一个常数 $C > 0$, 使得

$$LV(x) \leq \beta N - \mu - \gamma + \beta - \beta x + C - \left(\beta N - \mu - \gamma - \frac{N^2 \sigma^\alpha C_\alpha}{(2-\alpha)(2N)^{2-\alpha}} \right) x^{-1}.$$

由假设 $\beta N - \mu - \gamma - \frac{N^2 \sigma^\alpha C_\alpha}{(2-\alpha)(2N)^{2-\alpha}} > 0$ 知, 存在常数 $\xi > 0$, 使得

$$\beta N - \mu - \gamma - \frac{N^2 \sigma^\alpha C_\alpha}{(2-\alpha)(2N)^{2-\alpha}} - \xi > 0.$$

则存在常数 $K > 0$, 对于 $x \in (0, N)$, 有

$$\begin{aligned} LV(x) + \xi V(x) &\leq \beta N - \mu - \gamma + \beta - \beta x + \xi \ln(1+x) + C \\ &\quad - \left(\beta N - \mu - \gamma - \frac{N^2 \sigma^\alpha C_\alpha}{(2-\alpha)(2N)^{2-\alpha}} - \xi \right) x^{-1} \\ &< \beta N - \mu - \gamma + \beta - \beta x + \xi \ln(1+x) + C \\ &\leq K. \end{aligned}$$

即

$$LV(x) \leq -\xi V(x) + K.$$

则由引理 3 知结论成立. 证毕.

4 灭绝性

定义 3 假设 (A1)—(A3) 成立, 若对任意初始值 $x(0) = x_0 \in (0, N)$, 模型 (6) 的解 $x(t)$ 满足

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 \quad \text{几乎处处成立}, \quad (30)$$

则称 $x(t)$ 以概率 1 灭绝.

引理 4^[19] 令 $M(t), t \geq 0$, 为一个局部鞅, 定义

$$\rho_m(t) = \int_0^t \frac{d\langle M, M \rangle(s)}{(1+s)^2}, \quad t \geq 0,$$

其中 $\langle M, M \rangle(t)$ 是一个 Meyer 尖括号过程. 若有

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho_m(t) < \infty \quad \text{几乎处处成立},$$

则

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{M(t)}{t} = 0 \quad \text{几乎处处成立}.$$

定理 4 假设 (A1)—(A3) 成立, 则模型 (6) 的解满足

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln x(t)}{t} \leq \beta N - \mu - \gamma \quad \text{几乎处处成立.}$$

特别地, 若 $\beta N - \mu - \gamma < 0$, 则有

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0 \quad \text{几乎处处成立.}$$

证 明 由 Itô 公式得到

$$\begin{aligned} d \ln(x(t)) &= (\beta N - \mu - \gamma - \beta x(t)) dt + \int_0^{+\infty} (\ln(x(t) + \sigma x(t)(N - x(t))z) \\ &\quad - \ln x(t)) \tilde{N}(dt, dz) + \int_0^{+\infty} [\ln(x(t) + \sigma x(t)(N - x(t))z) \\ &\quad - \ln x(t) - \sigma(N - x(t))z I_{\{0 < z \leq 1\}}] \nu(dz) dt. \end{aligned}$$

对上式两侧积分, 得到

$$\begin{aligned} \ln(x(t)) &= \ln(x(0)) + \int_0^t (\beta N - \mu - \gamma - \beta x(s)) ds + M(t) \\ &\quad + \int_0^t \int_0^{+\infty} (\ln(1 + \sigma(N - x(s))z) - \sigma(N - x(s))z I_{\{0 < z \leq 1\}}) \nu(dz) ds \\ &= \ln(x(0)) + \int_0^t (\beta N - \mu - \gamma - \beta x(s)) ds + M(t) \\ &\quad + \int_0^t \int_0^1 (\ln(1 + \sigma(N - x(s))z) - \sigma(N - x(s))z) \nu(dz) ds, \end{aligned} \quad (31)$$

其中

$$M(t) = \int_0^t \int_0^{+\infty} \ln(1 + \sigma(N - x(s))z) \tilde{N}(ds, dz)$$

是一个局部鞅. 一方面, 由基本不等式

$$\ln(1 + t) \leq t, \quad \forall t > 0,$$

可得

$$\int_0^t \int_0^1 (\ln(1 + \sigma(N - x(s))z) - \sigma(N - x(s))z) \nu(dz) ds \leq 0, \quad (32)$$

将式 (32) 代入式 (31) 得到

$$\ln(x(t)) \leq \ln(x(0)) + (\beta N - \mu - \gamma)t + M(t). \quad (33)$$

另一方面, $M(t)$ 的 Meyer 尖括号过程为

$$\begin{aligned} \langle M, M \rangle(t) &= \int_0^t \int_0^{+\infty} (\ln(1 + \sigma(N - x(s))z))^2 \nu(dz) ds \\ &\leq \int_0^t \int_0^{+\infty} (\ln(1 + \sigma N z))^2 \nu(dz) ds. \end{aligned}$$

令 $y = \sigma Nz$, 则

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} (\ln(1 + \sigma Nz))^2 \nu(dz) &= (\sigma N)^\alpha \int_0^{+\infty} (\ln(1 + y))^2 \nu(dy) \\ &\leq (\sigma N)^\alpha \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{C_\alpha}{y^{\alpha-1}} dy \\ &= \frac{(\sigma N)^\alpha C_\alpha}{(2-\alpha)2^{2-\alpha}} \\ &< +\infty. \end{aligned} \quad (34)$$

因此

$$\int_0^t \frac{d\langle M, M \rangle(s)}{(1+s)^2} \leq \frac{t}{1+t} \int_0^{+\infty} (\ln(1 + \sigma Nz))^2 \nu(dz) < +\infty.$$

由引理 4 得到

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{M(t)}{t} = 0 \quad \text{几乎处处成立.} \quad (35)$$

将式 (31) 两侧同时除以 t , 得到

$$\frac{\ln x(t)}{t} \leq \frac{\ln(x(0))}{t} + \beta N - \mu - \gamma + \frac{M(t)}{t}.$$

当 $t \rightarrow +\infty$ 时有

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln x(t)}{t} \leq \beta N - \mu - \gamma \quad \text{几乎处处成立.}$$

特别地, 若

$$\beta N - \mu - \gamma < 0,$$

则有

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t) = 0 \quad \text{几乎处处成立.}$$

证毕.

[参 考 文 献]

- [1] World Health Organization. Number of deaths due to HIV [EB/OL]. [2017-08-01]. http://www.who.int/gho/hiv/epidemic_status/deaths/en/.
- [2] World Health Organization. How many TB cases and deaths are there? [EB/OL]. [2017-08-01]. http://www.who.int/gho/tb/epidemic/cases_deaths/en/.
- [3] KERMACK W O, MCKENDRICK A G. A contribution to the mathematical theory of epidemics [J]. Proceedings of the Royal Society of London, 1927, 115: 700-721.
- [4] HETHCOTE H W, YORKE J A. Gonorrhea Transmission Dynamics and Control [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1984.
- [5] GRAY A, GREENHALGH D, HU L, et al. A stochastic differential equations SIS epidemic model [J]. Siam Journal on Applied Mathematics, 2011, 71(3): 876-902.

(下转第 38 页)

- [7] KHANMAMEDOV A KH. Existence of a global attractor for the plate equation with a critical exponent in an unbounded domain [J]. Appl Math Lett, 2005, 18(7): 827-832.
- [8] KHANMAMEDOV A KH. Global attractors for the plate equation with a localized damping and a critical exponent in an unbounded domain [J]. J Differential Equations, 2006, 225(2): 528-548.
- [9] KHANMAMEDOV A KH. A global attractors for the plate equation with displacement-dependent damping [J]. Nonlinear Anal TMA, 2011, 74(3): 1607-1615.
- [10] SHEN X Y, MA Q Z. The existence of random attractors for plate equations with memory and additive white noise [J]. Korean J Math, 2016, 24(3): 447-467.
- [11] SHEN X Y, MA Q Z. Existence of random attractors for weakly dissipative plate equations with memory and additive white noise [J]. Comput Math Appl, 2017, 73(10): 2258-2271.
- [12] ARONLD L. Random Dynamical Systems [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1998.
- [13] CRAUEL H, FLANDOLI F. Attractors for random dynamical systems [J]. Probab Theory Relat Fields, 1994, 100(3): 365-393.
- [14] CRAUEL H, DEBUSSCHE A, FLANDOLI F. Random attractors [J]. J Dynamic Diff Equ, 1997, 9(2): 307-341.
- [15] DAFERMOS C M. Asymptotic stability in viscoelasticity [J]. Arch Rat Mech Anal, 1970, 37(4): 297-308.
- [16] PATA V. Attractors for a damped hyperbolic equation with linear memory [J]. Arch Rat Mech Anal, 2001, 2(3): 505-529.

(责任编辑: 林 磊)

(上接第 12 页)

- [6] RICHARDSON L F. Variation of the frequency of fatal quarrels with magnitude [J]. Journal of the American Statistical Association, 1948, 43(244): 523-546.
- [7] BROCKMANN D, HUFNAGEL L, GEISEL T. The scaling laws of human travel [J]. Nature, 2006, 439: 462-465.
- [8] NOLAN J P. Stable Distributions-Models for Heavy Tailed Data [M]. Boston: Birkhauser, 2009.
- [9] MAO X. Exponential Stability of Stochastic Differential Equations [M]. New York: Marcel Dekker, 1994.
- [10] BAO J, MAO X, YIN G G, et al. Competitive Lotka-Volterra population dynamics with jumps [J]. Nonlinear Analysis Theory Methods and Applications, 2011, 74(17): 6601-6616.
- [11] APPLEBAUM D. Lévy Processes and Stochastic Calculus [M] 2nd ed. Cambridge: Cambridge University Press, 2009: 251.
- [12] KLEBANER F C. Introduction to Stochastic Calculus with Applications [M]. 2nd ed. Melbourne: Monash University Press, 2004: 170.
- [13] KHASHINSKII R. Stochastic Stability of Differential Equations [M]. Berlin: Springer, 2011: 107.
- [14] ZHANG Z, ZHANG X, TONG, J. Exponential ergodicity for population dynamics driven by α -stable processes[J]. Statistics and Probability Letters, 2017, 125: 149-159.
- [15] CHEN X, CHEN Z, TRAN K, et al. Properties of switching jump diffusions: Maximum principles and Harnack inequalities[J]. Bernoulli, preprint, 2018.
- [16] CHEN X S, CHEN Z Q, TRAN K, et al. Recurrence and ergodicity for a class of regime-switching jump diffusions[J]. Applied Mathematics and Optimization, 2017(6): 1-31.
- [17] 沈燮昌. 数学分析 2 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2014.
- [18] MEYN S P, TWEEDIE R L. Stability of Markovian processes III: Foster-Lyapunov criteria for continuous-time processes [J]. Advances in Applied Probability, 2010, 25(3): 518-548.
- [19] LIPSTER R SH. A strong law of large numbers for local martingales [J]. Stochastics, 1980, 3: 217-228.

(责任编辑: 林 磊)