

文章编号: 1000-5641(2014)06-0025-10

具正负系数和阻尼项的高阶泛函微分方程的振动性

杨甲山

(梧州学院数理系, 广西 梧州 543002)

摘要: 研究了一类同时具有正负系数和非线性中立项及阻尼项的偶数阶非线性变时滞泛函微分方程的振动性, 通过引入参数函数和 Riccati 变换, 结合 Hölder 不等式及一些分析技巧, 获得了该类方程振动的一些新的判别准则, 所得结论推广并改进了现有文献中的一些结果. 给出了具体例子, 用以说明文中的主要结论.

关键词: 振动性; 正负系数; 阻尼项; 泛函微分方程; Riccati 变换

中图分类号: O175.7 **文献标识码:** A **DOI:** 10.3969/j.issn.1000-5641.2014.06.005

Oscillation of higher order functional differential equations with positive and negative coefficients and damping term

YANG Jia-shan

(Department of Mathematics and Physics, Wuzhou University, Wuzhou Guangxi 543002, China)

Abstract: The oscillation for a class of even order nonlinear variable delay damped functional differential equation with positive and negative coefficients and nonlinear neutral term was discussed. By introducing parameter function and the generalized Riccati transformation, using Hölder inequality and some necessary analytic techniques, some new criteria for the oscillation of the equation were proposed. These criteria improve and generalize some known results. Examples were given to illustrate the main results.

Key words: oscillation; positive and negative coefficient; damped term; functional differential equation; Riccati transformation

0 引 言

考虑如下—类非常广泛的—同时具有正负系数和非线性中立项的高阶非线性变时滞阻尼泛函微分方程

$$[A(t)\phi(z^{(n-1)}(t))] + b(t)\phi(z^{(n-1)}(t)) + Q(t)f(\phi(x(\sigma(t)))) - R(t)g(\phi(x(\sigma(t)))) = 0, t \geq t_0, \quad (1)$$

其中 $z(t) = x(t) + P(t)B(x(\tau(t)))$; $n \geq 2$ 为偶数; $t_0 \geq 0$ 为常数; $A(t), P(t) \in C([t_0, +\infty), \mathbf{R})$, $b(t), Q(t), R(t) \in C([t_0, +\infty), [0, +\infty))$; $\phi(u) = |u|^{\gamma-1}u$ ($\gamma > 0$ 为常数); $B(u), f(u), g(u) \in C(\mathbf{R}, \mathbf{R})$, 且 $uB(u) > 0$ ($u \neq 0$), $uf(u) > 0$ ($u \neq 0$), $ug(u) > 0$ ($u \neq 0$).

收稿日期: 2013-11

基金项目: 广西教育厅科研基金(2013YB223); 湖南省科技厅基金项目(2012FJ3107)

作者简介: 杨甲山, 男, 教授, 研究方向为微分差分方程及动力方程. E-mail: syxyjys@163.com.

本文可看成是文献[1]的继续(当 $P(t) \equiv 0$ 时即为其中所讨论的方程). 我们只讨论方程(1)的非平凡解. 方程(1)的解 $x(t)$ 称为是最终正解(或最终负解), 如果存在常数 $\mu \geq t_0$, 使得当 $t \geq \mu$ 时, $x(t) > 0$ (或 $x(t) < 0$); 方程(1)的解 $x(t)$ 称为是振动的, 如果它既不最终为正也不最终为负, 否则称它是非振动的; 方程(1)称为是振动的, 如果它的所有解都是振动的. 为了叙述方便, 本文中的函数不等式(如果没有特别说明), 都是对充分大的实数 t 成立的, 并总假设下列条件成立.

(H₁) $\tau(t) \in C([t_0, +\infty), (0, +\infty))$, $\tau(t) \leq t$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \tau(t) = +\infty$.

(H₂) $\sigma(t) \in C^1([t_0, +\infty), (0, +\infty))$, $\sigma(t) \leq t$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \sigma(t) = +\infty$, $\sigma'(t) > 0$.

(H₃) 存在常数 $0 < \eta \leq 1$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, 使得 $B(u)/u \leq \eta(u \neq 0)$, $f(u)/u \geq \alpha(u \neq 0)$, $g(u)/u \leq \beta(u \neq 0)$, 且 $\alpha Q(t) - \beta R(t) > 0$ 最终成立.

(H₄) $0 \leq P(t) \leq 1$; $A(t) \in C^1([t_0, +\infty), \mathbf{R})$, 且 $A(t) > 0$, $A'(t) > 0$.

(H₅) $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{t_0}^t \left[\frac{1}{A(u)} \exp \left(- \int_{t_0}^u \frac{b(s)}{A(s)} ds \right) \right]^{1/\gamma} du = +\infty$.

近年来, 有关泛函数微分方程的振动和非振动成果非常丰富^[1-17], 关于方程(1)的特殊情形及其振动性结果见文献[1-15]. 若方程(1)中 $P(t) \equiv 0$, $f(u) = u$, $R(t) \equiv 0$, 则简化为

$$[A(t)\phi(x^{(n-1)}(t))] + b(t)\phi(x^{(n-1)}(t)) + Q(t)\phi(x(\delta(t))) = 0. \quad (2)$$

而关于方程(2)的振动性, 文献[6]也作了仔细研究, 并给出了3个非常有价值的振动准则. 但我们可看出, 其中定理1可由定理3得出(在定理3中取 $H(t, s) = (t - s)^m$ 即可). 当用定理3不能判别方程的振动性时, 定理2基本也就失效了. 因此, 定理3是文献[6]的中心定理, 也是一个非常广泛实用的振动性判别准则. 本文的目的是研究方程(1)振动性, 籍助于 Young 不等式和 Hölder 不等式, 利用 Ricatti 变换和 H 函数的方法, 将 Kamenev 型振动准则和 Philos 型振动准则推广到同时具有正负系数和非线性中立项及阻尼项的高阶非线性变时滞泛函微分方程(1), 使得现有文献中的许多结果均为我们结果的特例, 同时给出了当文献[6]中定理3的条件(C₉)(文献[1-15]也有类似的条件)不成立时的一些新的振动准则.

引理 1^[2] 设 u 在 $[t_0, +\infty)$ 上是正的 n 次可微函数, $u^{(n)}(t)$ 最终定号, 则存在 $t^* \geq t_0$ 和整数 $l(0 \leq l \leq n)$, 当 $u^{(n)}(t) \geq 0$ 时, $n + l$ 为偶数; 当 $u^{(n)}(t) \leq 0$ 时, $n + l$ 为奇数, 使得

当 $l > 0$ 时有 $u^{(k)}(t) > 0$, $t \geq t^*$, $k = 0, 1, \dots, l-1$; 且当 $l \leq n-1$ 时有 $(-1)^{l+k} u^{(k)}(t) > 0$, $t \geq t^*$, $k = l, l+1, \dots, n-1$.

引理 2^[3] 设 u 满足引理1的条件, 且 $u^{(n-1)}(t)u^{(n)}(t) \leq 0(t \geq t^*)$, 则对任何 $\theta \in (0, 1)$, 存在常数 $M > 0$, 使得对一切充分大的 t 有 $u'(\theta t) \geq Mt^{n-2}u^{(n-1)}(t)$.

引理 3^[4] 设 a, b 为非负实数, $\lambda > 1$, 则 $\lambda ab^{\lambda-1} - a^\lambda \leq (\lambda - 1)b^\lambda$, 等号成立当且仅当 $a = b$.

引理 4 设 $x(t)$ 是方程(1)的最终正解, 则 $z(t) > 0$, $z'(t) > 0$, $z^{(n-1)}(t) > 0$, $z^{(n)}(t) \leq 0$.

证明完全类似于文献[1]中的引理4, 在此从略.

1 主要结果和证明

考虑集合 $D = \{(t, s) | t \geq s \geq t_0\}$, $D_0 = \{(t, s) | t > s \geq t_0\}$. 称函数 $H \in \mathbf{Y}$, 如果函数 $H(t, s) \in C^1(D, \mathbf{R})$, 当 $t \geq t_0$ 时 $H(t, t) = 0$; 当 $(t, s) \in D_0$ 时 $H(t, s) > 0$ 且 $H(t, s)$ 对第二个变量有连续非正的偏导数. 引入记号

$$\Phi(s) = [\alpha Q(s) - \beta R(s)] [1 - \eta P(\sigma(s))]^\gamma, \quad \psi(s) = \frac{(\gamma + 1)^{-(\gamma+1)} A(s)}{[\theta M \sigma^{n-2}(s) \sigma'(s)]^\gamma}. \quad (3)$$

定理 1 若存在函数 $H \in \mathbf{Y}$ 及 $\rho(t) \in C^1([t_0, +\infty), (0, +\infty))$, 使得

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup \frac{1}{H(t, t_0)} \int_{t_0}^t \rho(s) \left\{ H(t, s) \Phi(s) - \frac{\psi(s) |h(t, s)|^{\gamma+1}}{H^\gamma(t, s)} \right\} ds = +\infty, \quad (4)$$

其中 $h(t, s) = H(t, s) \left[\frac{\rho'(s)}{\rho(s)} - \frac{b(s)}{A(s)} \right] + \frac{\partial H(t, s)}{\partial s}$, $\Phi(s)$ 及 $\psi(s)$ 定义如 (3) 式, 常数 $\theta \in (0, 1)$ 和 $M > 0$ 如引理 2. 则方程 (1) 是振动的.

证明 设方程 (1) 存在非振动解 $x(t)$, 不失一般性, 设 $x(t) > 0$, $x(\tau(t)) > 0$, $x(\sigma(t)) > 0$, $t \geq T \geq t_0$. 且引理 4 成立. 由方程 (1) 并注意到条件 (H_3) , 得

$$[A(t)\phi(z^{(n-1)}(t))] + b(t)\phi(z^{(n-1)}(t)) \leq -[\alpha Q(t) - \beta R(t)]\phi(x(\sigma(t))) < 0. \quad (5)$$

由引理 2, 对任意 $0 < \theta < 1$, 存在常数 $M > 0$, 有

$$z'(\theta\sigma(t)) \geq M\sigma^{n-2}(t)z^{(n-1)}(\sigma(t)) \geq M\sigma^{n-2}(t)z^{(n-1)}(t). \quad (6)$$

由于 $x(t) \leq z(t)$, 于是 $z(t) \leq x(t) + P(t)\eta x(\tau(t)) \leq x(t) + \eta P(t)z(\tau(t)) \leq x(t) + \eta P(t)z(t)$, 即

$$x(t) \geq [1 - \eta P(t)]z(t) \geq 0. \quad (7)$$

定义函数

$$V(t) = \rho(t) \frac{A(t)\phi(z^{(n-1)}(t))}{\phi(z(\theta\sigma(t)))} = \rho(t) \frac{A(t)[z^{(n-1)}(t)]^\gamma}{[z(\theta\sigma(t))]^\gamma}, \quad t \geq T, \quad (8)$$

则 $V(t) > 0 (t \geq T)$, 注意到式 (5)–(7), 可得

$$\begin{aligned} V'(t) &= \rho'(t) \frac{A(t)\phi(z^{(n-1)}(t))}{\phi(z(\theta\sigma(t)))} + \rho(t) \frac{[A(t)\phi(z^{(n-1)}(t))]'}{\phi(z(\theta\sigma(t)))} - \rho(t) \frac{A(t)[z^{(n-1)}(t)]^\gamma}{[z(\theta\sigma(t))]^{\gamma+1}} \gamma \theta z'(\theta\sigma(t)) \sigma'(t) \\ &\leq \frac{\rho'(t)}{\rho(t)} V(t) - \rho(t) \frac{b(t)\phi(z^{(n-1)}(t)) + [\alpha Q(t) - \beta R(t)]\phi(x(\sigma(t)))}{\phi(z(\theta\sigma(t)))} \\ &\quad - \rho(t) \frac{A(t)[z^{(n-1)}(t)]^{\gamma+1}}{[z(\theta\sigma(t))]^{\gamma+1}} \gamma \theta M \sigma^{n-2}(t) \sigma'(t) \\ &\leq \frac{\rho'(t)}{\rho(t)} V(t) - \frac{b(t)}{A(t)} V(t) - \rho(t) [\alpha Q(t) - \beta R(t)] [1 - \eta P(\sigma(t))]^\gamma \\ &\quad - \frac{\gamma \theta M \sigma^{n-2}(t) \sigma'(t) [V(t)]^{(\gamma+1)/\gamma}}{[\rho(t) A(t)]^{1/\gamma}}, \end{aligned}$$

注意到式 (3) 的第一个式子, 由上式, 当 $t \geq T$ 时, 有

$$\rho(t)\Phi(t) \leq -V'(t) + \left[\frac{\rho'(t)}{\rho(t)} - \frac{b(t)}{A(t)} \right] V(t) - \frac{\gamma \theta M \sigma^{n-2}(t) \sigma'(t) [V(t)]^{(\gamma+1)/\gamma}}{[\rho(t) A(t)]^{1/\gamma}}.$$

将上式中的 t 改成 s , 再两边同乘以 $H(t, s)$, 并从 T 到 $t (t \geq T)$ 积分, 由分部积分法, 可得

$$\int_T^t H(t, s) \rho(s) \Phi(s) ds \leq - \int_T^t H(t, s) V'(s) ds + \int_T^t H(t, s) \left[\frac{\rho'(s)}{\rho(s)} - \frac{b(s)}{A(s)} \right] V(s) ds$$

$$\begin{aligned}
& - \int_T^t H(t, s) \frac{\gamma \theta M \sigma^{n-2}(s) \sigma'(s) [V(s)]^{(\gamma+1)/\gamma}}{[\rho(s) A(s)]^{1/\gamma}} ds \\
& = - [H(t, s) V(s)]_T^t + \int_T^t \left\{ \frac{\partial H(t, s)}{\partial s} + H(t, s) \left[\frac{\rho'(s)}{\rho(s)} - \frac{b(s)}{A(s)} \right] \right\} V(s) ds \\
& - \int_T^t H(t, s) \frac{\gamma \theta M \sigma^{n-2}(s) \sigma'(s) [V(s)]^{(\gamma+1)/\gamma}}{[\rho(s) A(s)]^{1/\gamma}} ds \\
& = H(t, T) V(T) + \int_T^t h(t, s) V(s) ds - \int_T^t H(t, s) \\
& \quad \frac{\gamma \theta M \sigma^{n-2}(s) \sigma'(s) [V(s)]^{(\gamma+1)/\gamma}}{[\rho(s) A(s)]^{1/\gamma}} ds. \tag{9}
\end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned}
\lambda &= \frac{\gamma+1}{\gamma}, \quad a = [H(t, s) \gamma \theta M \sigma^{n-2}(s) \sigma'(s)]^{\frac{\gamma}{\gamma+1}} [\rho(s) A(s)]^{\frac{-1}{\gamma+1}} V(s), \\
b &= \left(\frac{\gamma}{\gamma+1} \right)^\gamma [H(t, s) \gamma \theta M \sigma^{n-2}(s) \sigma'(s)]^{\frac{-\gamma^2}{\gamma+1}} [\rho(s) A(s)]^{\frac{\gamma}{\gamma+1}} |h(t, s)|^\gamma.
\end{aligned}$$

将其代入引理 3 中的不等式, 得

$$\begin{aligned}
& |h(t, s)| V(s) - H(t, s) \frac{\gamma \theta M \sigma^{n-2}(s) \sigma'(s) [V(s)]^{(\gamma+1)/\gamma}}{[\rho(s) A(s)]^{1/\gamma}} \\
& \leq \frac{(\gamma+1)^{-(\gamma+1)} \rho(s) A(s) |h(t, s)|^{\gamma+1}}{[H(t, s) \gamma \theta M \sigma^{n-2}(s) \sigma'(s)]^\gamma} = \frac{\rho(s) \psi(s) |h(t, s)|^{\gamma+1}}{H^\gamma(t, s)}. \tag{10}
\end{aligned}$$

将式 (10) 代入式 (9), 就有

$$\int_T^t H(t, s) \rho(s) \Phi(s) ds \leq H(t, T) V(T) + \int_T^t \frac{\rho(s) \psi(s) |h(t, s)|^{\gamma+1}}{H^\gamma(t, s)} ds. \tag{11}$$

即

$$\int_T^t \rho(s) \left[H(t, s) \Phi(s) - \frac{\psi(s) |h(t, s)|^{\gamma+1}}{H^\gamma(t, s)} \right] ds \leq H(t, T) V(T) \leq H(t, t_0) V(T). \tag{12}$$

于是

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{H(t, t_0)} \int_{t_0}^t \rho(s) \left[H(t, s) \Phi(s) - \frac{\psi(s) |h(t, s)|^{\gamma+1}}{H^\gamma(t, s)} \right] ds \\
& = \frac{1}{H(t, t_0)} \left\{ \int_{t_0}^T \rho(s) \left[H(t, s) \Phi(s) - \frac{\psi(s) |h(t, s)|^{\gamma+1}}{H^\gamma(t, s)} \right] ds \right. \\
& \quad \left. + \int_T^t \rho(s) \left[H(t, s) \Phi(s) - \frac{\psi(s) |h(t, s)|^{\gamma+1}}{H^\gamma(t, s)} \right] ds \right\} \\
& \leq \int_{t_0}^T \rho(s) \Phi(s) ds + V(T) = C + V(T),
\end{aligned}$$

其中 $\int_{t_0}^T \rho(s) \Phi(s) ds = C$ 为常数. 上式两边取上极限, 得与 (4) 式矛盾! 定理证毕.

注 1 通过选择恰当的不同的函数 $H(t, s)$ 和 $\rho(s)$ 就能导出许多关于方程 (1) 及其特殊情形的不同类型的其它具体振动准则. 例如, 若方程 (1) 中 $n = 2$, $P(t) \equiv 0$, $R(t) \equiv 0$, $f(u) = u$, $\sigma(t) = t$, 并在定理 1 中取 $\rho(s) \equiv 1$, 于是由定理 1, 我们可得如下结果:

推论 1 若存在函数 $H \in \mathbf{Y}$, 使得

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{H(t, t_0)} \int_{t_0}^t \left\{ H(t, s)Q(s) - \frac{A(s)|h(t, s) + \sqrt{H(t, s)}|^{\gamma+1}b(s)/A(s)}{(\gamma+1)^{\gamma+1}[H(t, s)]^{(\gamma-1)/2}} \right\} ds = +\infty,$$

其中 $h(t, s)\sqrt{H(t, s)} = -\frac{\partial H(t, s)}{\partial s}$. 则方程 $[A(t)|x'(t)|^{\gamma-1}x'(t)]' + b(t)|x'(t)|^{\gamma-1}x'(t) + Q(t)|x(t)|^{\gamma-1}x(t) = 0$ 是振动的.

这是 Li, Zhong 和 Fan^[5] 将 Philos 型振动准则推广到了二阶半线性阻尼微分方程所得到的结果, 本文将推广到了具有正负系数和阻尼项及非线性中立项的高阶变时滞微分方程 (1). 又如取 $H(t, s) = (t-s)^k$, 由定理 1, 我们可得如下结果.

推论 2 如果存在常数 $k > \gamma$ 及函数 $\rho(t) \in C^1([t_0, +\infty), (0, +\infty))$, 使得

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t^k} \int_{t_0}^t (t-s)^k \rho(s) \left[\Phi(s) - \Psi(s) \left| \frac{\rho'(s)}{\rho(s)} - \frac{b(s)}{A(s)} - \frac{k}{t-s} \right|^{\gamma+1} \right] ds = +\infty,$$

其中常数 $\theta \in (0, 1)$ 和 $M > 0$ 如引理 2, 函数 $\Phi(s), \Psi(s)$ 定义如 (3) 式. 则方程 (1) 是振动的.

进一步, 若方程 (1) 中 $n = 2, P(t) \equiv 0, b(t) \equiv 0, R(t) \equiv 0, f(u) = u, \sigma(t) = t$, 并在推论 2 中取 $\rho(t) = 1$, 则有:

推论 3 设 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{t_0}^t [A(u)]^{\frac{-1}{\gamma}} du = +\infty$, 如果存在常数 $k > \gamma$, 使得

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t^k} \int_{t_0}^t (t-s)^{k-\gamma-1} \left[(t-s)^{\gamma+1}Q(s) - \left(\frac{k}{\gamma+1} \right)^{\gamma+1} A(s) \right] ds = +\infty,$$

则方程 $[A(t)\phi(x'(t))] + Q(t)\phi(x(t)) = 0 (t \geq t_0)$ 是振动的.

推论 3 就是文献 [4] 中的定理 4.7.5, 也是 Li 和 Yeh^[7] 推广了 Kamenev 的结果所得到的结论. 此外, 若方程 (1) 中 $P(t) \equiv 0, R(t) \equiv 0, f(u) = u$, 则定理 1 即为文献 [6] 中的定理 3. 其它相关结果可参考文献 [8-14].

若 (4) 式不成立, 我们有下面的判别准则.

定理 2 若存在函数 $H \in \mathbf{Y}$ 及 $\rho(t) \in C^1([t_0, +\infty), (0, +\infty))$, $\xi(t) \in C([t_0, +\infty), \mathbf{R})$, 使得

$$\begin{aligned} 0 < \inf_{s \geq T} \left[\liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{H(t, s)}{H(t, T)} \right] &\leq +\infty, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \sup \frac{1}{H(t, T)} \int_T^t \rho(s) \frac{\psi(s)|h(t, s)|^{\gamma+1}}{H^\gamma(t, s)} ds < +\infty, \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} \sup \frac{1}{H(t, u)} \int_u^t \rho(s) \left[H(t, s)\Phi(s) - \frac{\psi(s)|h(t, s)|^{\gamma+1}}{H^\gamma(t, s)} \right] ds &\geq \xi(u), u \geq T, \\ \int_T^{+\infty} \sigma^{n-2}(s)\sigma'(s)[\rho(s)A(s)]^{-1/\gamma}[\xi_+(s)]^{(\gamma+1)/\gamma} ds &= +\infty, \end{aligned} \quad (13)$$

其中 $T \geq t_0$ 为某常数, $\xi_+(t) = \max\{\xi(t), 0\}$, $\Phi(s)$ 和 $\psi(s)$ 定义如 (3) 式, $h(t, s)$ 定义如定理 1, 常数 $\theta \in (0, 1)$ 和 $M > 0$ 如引理 2. 则方程 (1) 是振动的.

证明 设方程 (1) 存在非振动解 $x(t)$, 不失一般性, 设 $x(t) > 0, x(\tau(t)) > 0, x(\sigma(t)) > 0, t \geq T \geq t_0$. 定义函数 $V(t)$ 如 (8) 式, 则由定理 1 的证明知式 (9), (12) 成立. 由式 (12) 知, 当 $t \geq u \geq T \geq t_0$ 时, 有 $\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{H(t, u)} \int_u^t \rho(s) \left[H(t, s)\Phi(s) - \frac{\psi(s)|h(t, s)|^{\gamma+1}}{H^\gamma(t, s)} \right] ds \leq V(u)$, 于是由 (13) 式, 我们可以得到

$$\xi(u) \leq V(u), u \geq T; \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \sup \frac{1}{H(t, T)} \int_T^t H(t, s)\rho(s)\Phi(s) ds \geq \xi(T). \quad (14)$$

由式 (9), 得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{H(t, T)} \int_T^t H(t, s) \rho(s) \Phi(s) ds \leq V(T) + \frac{1}{H(t, T)} \int_T^t |h(t, s)| V(s) ds \\ & - \frac{1}{H(t, T)} \int_T^t H(t, s) \gamma \theta M \sigma^{n-2}(s) \sigma'(s) [\rho(s) A(s)]^{-1/\gamma} [V(s)]^{(\gamma+1)/\gamma} ds, \end{aligned}$$

为方便起见, 在上式中记

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= \frac{1}{H(t, T)} \int_T^t |h(t, s)| V(s) ds, \\ \varphi_2(t) &= \frac{1}{H(t, T)} \int_T^t H(t, s) \gamma \theta M \sigma^{n-2}(s) \sigma'(s) [\rho(s) A(s)]^{-1/\gamma} [V(s)]^{(\gamma+1)/\gamma} ds, \end{aligned}$$

注意到式 (14), 于是可得

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} [\varphi_2(t) - \varphi_1(t)] \leq V(T) - \lim_{t \rightarrow +\infty} \sup \frac{1}{H(t, T)} \int_T^t H(t, s) \rho(s) \Phi(s) ds \leq V(T) - \xi(T) < +\infty.$$

余下的证明完全类似于文献 [4] 中的定理 4.7.7, 在此从略. 定理证毕.

定理 3 若存在函数 $H \in \mathbf{Y}$ 及 $\rho(t) \in C^1([t_0, +\infty), (0, +\infty))$, $\xi_1(t), \xi_2(t) \in L^2([t_0, +\infty), \mathbf{R})$ 使得对任意的 $s \geq T$, 有

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{H(t, s)} \int_s^t H(t, \tau) \rho(\tau) \Phi(\tau) d\tau \geq \xi_1(s), \quad (15)$$

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{H(t, s)} \int_s^t \frac{\rho(\tau) \psi(\tau)}{H^\gamma(t, \tau)} |h(t, \tau)|^{\gamma+1} d\tau \leq \xi_2(s), \quad (16)$$

并且 ξ_1 和 ξ_2 满足

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{H(t, T)} \int_T^t \frac{H(t, \tau) \sigma^{n-2}(\tau) \sigma'(\tau) [\xi_1(\tau) - \xi_2(\tau)]_+^{(\gamma+1)/\gamma}}{[\rho(\tau) A(\tau)]^{1/\gamma}} d\tau = +\infty, \quad (17)$$

其中 $T \geq t_0$ 为某常数, $[\xi_1(\tau) - \xi_2(\tau)]_+ = \max\{[\xi_1(\tau) - \xi_2(\tau)], 0\}$, $\Phi(s)$ 和 $\psi(s)$ 定义如 (3) 式, $h(t, s)$ 定义如定理 1, 常数 $\theta \in (0, 1)$ 和 $M > 0$ 如引理 2. 则方程 (1) 是振动的.

证 明 设方程 (1) 存在非振动解 $x(t)$, 不失一般性, 设 $x(t) > 0$, $x(\tau(t)) > 0$, $x(\sigma(t)) > 0$, $t \geq T \geq t_0$. 定义函数 $V(t)$ 如 (8) 式, 则由定理 1 的证明可得 (9) 式和 (11) 式. 由 (11) 式, 当 $t \geq s \geq T \geq t_0$ 时, 有

$$\int_s^t H(t, \tau) \rho(\tau) \Phi(\tau) d\tau \leq H(t, s) V(s) + \int_s^t \frac{\rho(\tau) \psi(\tau)}{H^\gamma(t, \tau)} |h(t, \tau)|^{\gamma+1} d\tau. \quad (18)$$

由式 (18), 进一步可得

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{H(t, s)} \int_s^t H(t, \tau) \rho(\tau) \Phi(\tau) d\tau \leq V(s) + \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{H(t, s)} \int_s^t \frac{\rho(\tau) \psi(\tau)}{H^\gamma(t, \tau)} |h(t, \tau)|^{\gamma+1} d\tau.$$

注意到式 (15), (16), 由上式即得

$$\xi_1(s) - \xi_2(s) \leq V(s), s \geq T \geq t_0. \quad (19)$$

另一方面, 由式 (9), 有

$$\begin{aligned} & \frac{1}{H(t, T)} \int_T^t \left\{ H(t, \tau) \frac{\gamma \theta M \sigma^{n-2}(\tau) \sigma'(\tau) [V(\tau)]^{(\gamma+1)/\gamma}}{[\rho(\tau) A(\tau)]^{1/\gamma}} - |h(t, \tau)| V(\tau) \right\} d\tau \\ & \leq V(T) - \frac{1}{H(t, T)} \int_T^t H(t, \tau) \rho(\tau) \Phi(\tau) d\tau \end{aligned}$$

上式蕴含着

$$\begin{aligned} & \liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{H(t, T)} \int_T^t \left\{ \frac{H(t, \tau) \gamma \theta M \sigma^{n-2}(\tau) \sigma'(\tau) [V(\tau)]^{(\gamma+1)/\gamma}}{[\rho(\tau) A(\tau)]^{1/\gamma}} - |h(t, \tau)| V(\tau) \right\} d\tau \\ & \leq V(T) - \xi_1(T) \leq C_0 \end{aligned} \quad (20)$$

式中 C_0 为某常数, 并能断言

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{H(t, T)} \int_T^t \frac{H(t, \tau) \gamma \theta M \sigma^{n-2}(\tau) \sigma'(\tau) [V(\tau)]^{(\gamma+1)/\gamma}}{[\rho(\tau) A(\tau)]^{1/\gamma}} d\tau < +\infty. \quad (21)$$

事实上, 若上式不成立, 则存在序列 $\{T_n\}_{n=1}^{+\infty}$: $T_n \in [T, +\infty)$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = +\infty$, 使得

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{H(T_n, T)} \int_T^{T_n} \frac{H(T_n, \tau) \gamma \theta M \sigma^{n-2}(\tau) \sigma'(\tau) [V(\tau)]^{(\gamma+1)/\gamma}}{[\rho(\tau) A(\tau)]^{1/\gamma}} d\tau = +\infty.$$

于是由式 (20), 知

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{H(T_n, T)} \int_T^{T_n} |h(T_n, \tau)| V(\tau) d\tau = +\infty, \quad (22)$$

所以, 对充分大的正整数 n ,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{H(T_n, T)} \int_T^{T_n} \frac{H(T_n, \tau) \gamma \theta M \sigma^{n-2}(\tau) \sigma'(\tau) [V(\tau)]^{(\gamma+1)/\gamma}}{[\rho(\tau) A(\tau)]^{1/\gamma}} d\tau \\ & - \frac{1}{H(T_n, T)} \int_T^{T_n} |h(T_n, \tau)| V(\tau) d\tau < C_0 + 1. \end{aligned}$$

于是, 对充分大的正整数 n 及 $\varepsilon \in (0, 1)$, 有

$$\frac{\int_T^{T_n} |h(T_n, \tau)| V(\tau) d\tau}{\int_T^{T_n} \frac{H(T_n, \tau) \gamma \theta M \sigma^{n-2}(\tau) \sigma'(\tau) [V(\tau)]^{(\gamma+1)/\gamma}}{[\rho(\tau) A(\tau)]^{1/\gamma}} d\tau} > 1 - \varepsilon > 0. \quad (23)$$

另一方面, 由 Hölder 不等式 $\int_a^b f(x)g(x)dx \leq \left[\int_a^b (f(x))^p dx \right]^{\frac{1}{p}} \left[\int_a^b (g(x))^q dx \right]^{\frac{1}{q}}$ (这里 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$), 并注意到 (3) 的第二个式子, 可得

$$\begin{aligned} \int_T^{T_n} |h(T_n, \tau)| V(\tau) d\tau &= \int_T^{T_n} \frac{[H(T_n, \tau) \gamma \theta M \sigma^{n-2}(\tau) \sigma'(\tau) [\rho(\tau) A(\tau)]^{-1/\gamma}]^{\frac{\gamma}{\gamma+1}} V(\tau) \cdot |h(T_n, \tau)|}{[H(T_n, \tau) \gamma \theta M \sigma^{n-2}(\tau) \sigma'(\tau) [\rho(\tau) A(\tau)]^{-1/\gamma}]^{\frac{\gamma}{\gamma+1}}} d\tau \\ &\leq \left\{ \int_T^{T_n} H(T_n, \tau) \gamma \theta M \sigma^{n-2}(\tau) \sigma'(\tau) [\rho(\tau) A(\tau)]^{-1/\gamma} [V(\tau)]^{(\gamma+1)/\gamma} d\tau \right\}^{\frac{\gamma}{\gamma+1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \left\{ \int_T^{T_n} \frac{|h(T_n, \tau)|^{\gamma+1}}{[H(T_n, \tau) \gamma \theta M \sigma^{n-2}(\tau) \sigma'(\tau) [\rho(\tau) A(\tau)]^{-1/\gamma}]^\gamma} d\tau \right\}^{\frac{1}{\gamma+1}} \\
& = \frac{\gamma+1}{\gamma^{\gamma/(\gamma+1)}} \left\{ \int_T^{T_n} \frac{H(T_n, \tau) \gamma \theta M \sigma^{n-2}(\tau) \sigma'(\tau) [V(\tau)]^{(\gamma+1)/\gamma}}{[\rho(\tau) A(\tau)]^{1/\gamma}} d\tau \right\}^{\frac{\gamma}{\gamma+1}} \\
& \quad \left\{ \int_T^{T_n} \frac{\rho(\tau) \Psi(\tau) |h(T_n, \tau)|^{\gamma+1}}{H^\gamma(T_n, \tau)} d\tau \right\}^{\frac{1}{\gamma+1}},
\end{aligned}$$

由上式并注意到式 (23), 得

$$\begin{aligned}
0 & < \frac{(1-\varepsilon)^\gamma}{H(T_n, T)} \int_T^{T_n} |h(T_n, \tau)| V(\tau) d\tau \\
& < \frac{\left\{ \int_T^{T_n} |h(T_n, \tau)| V(\tau) d\tau \right\}^{\gamma+1}}{H(T_n, T) \left\{ \int_T^{T_n} \frac{H(T_n, \tau) \gamma \theta M \sigma^{n-2}(\tau) \sigma'(\tau) [V(\tau)]^{(\gamma+1)/\gamma}}{[\rho(\tau) A(\tau)]^{1/\gamma}} d\tau \right\}^\gamma} \\
& \leq \frac{(\gamma+1)^{\gamma+1}}{\gamma^\gamma H(T_n, T)} \int_T^{T_n} \frac{\rho(\tau) \Psi(\tau) |h(T_n, \tau)|^{\gamma+1}}{H^\gamma(T_n, \tau)} d\tau.
\end{aligned}$$

由式 (16) 知, 上式右边是有界的, 这与式 (22) 矛盾! 所以式 (21) 是成立的.

由式 (21), 并注意到式 (19), 我们有

$$\begin{aligned}
& \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{H(T_n, T)} \int_T^{T_n} \frac{H(T_n, \tau) \sigma^{n-2}(\tau) \sigma'(\tau) [\xi_1(\tau) - \xi_2(\tau)]_+^{(\gamma+1)/\gamma}}{[\rho(\tau) A(\tau)]^{1/\gamma}} d\tau \\
& \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{H(T_n, T)} \int_T^{T_n} \frac{H(T_n, \tau) \sigma^{n-2}(\tau) \sigma'(\tau) [V(\tau)]^{(\gamma+1)/\gamma}}{[\rho(\tau) A(\tau)]^{1/\gamma}} d\tau < +\infty,
\end{aligned}$$

这与式 (17) 矛盾! 定理证毕.

适当选取函数 H 和 ρ , 就可以从定理 3 得到方程 (1) 的一系列具体振动准则. 例如, 取 $H(t, s) = (t-s)^k$, $\rho(t) \equiv 1$, 就有

推论 4 如果存在函数 $\xi_1(t), \xi_2(t) \in L^2([t_0, +\infty), \mathbf{R})$ 及常数 $k > \gamma$, 使得

$$\begin{aligned}
& \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{(t-s)^k} \int_s^t (t-\tau)^k \Phi(\tau) d\tau \geq \xi_1(s), \\
& \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{(t-s)^k} \int_s^t (t-\tau)^k \Psi(\tau) \left(\frac{b(\tau)}{A(\tau)} + \frac{k}{t-\tau} \right)^{\gamma+1} d\tau \leq \xi_2(s),
\end{aligned}$$

并且 ξ_1 和 ξ_2 满足 $\liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t^k} \int_T^t \frac{(t-\tau)^k \sigma^{n-2}(\tau) \sigma'(\tau) [\xi_1(\tau) - \xi_2(\tau)]_+^{(\gamma+1)/\gamma}}{[A(\tau)]^{1/\gamma}} d\tau = +\infty$, 其中 $T \geq t_0$ 为某常数, $[\xi_1(\tau) - \xi_2(\tau)]_+ = \max\{\xi_1(\tau) - \xi_2(\tau), 0\}$, $\Phi(s)$ 和 $\psi(s)$ 定义如式 (3). 则方程 (1) 是振动的.

注 2 定理 3 及推论 4 分别推广并改进了文献 [8] 中的定理 2.1 和推论 2.2.

2 例子及应用

例1 若方程(1)中 $n = 4$, $t_0 = 1$, $\gamma = 2$, $A(t) = t^{\frac{1}{2}}$, $b(t) = t^{-\frac{5}{2}}$, $B(u) = u$, $\tau(t) = \sigma(t) = \frac{t}{2}$, $P(t) = \frac{1}{2}$, $Q(t) = t^2 \sin^2 t + \frac{1}{2t}$, $R(t) = 2t^2 \sin^2 t$, $f(u) = u[2 + \ln^\gamma(1 + u^2)]$, $g(u) = \frac{u}{\sqrt{1 + \sin^4(u+1)}}$, 则

$$\frac{f(u)}{u} = 2 + \ln^\gamma(1 + u^2) \geq 2 = \alpha(u \neq 0), \quad \frac{g(u)}{u} = \frac{1}{\sqrt{1 + \sin^4(u+1)}} \leq 1 = \beta(u \neq 0),$$

$$\alpha Q(t) - \beta R(t) = 2 \left(t^2 \sin^2 t + \frac{1}{2t} \right) - 2t^2 \sin^2 t = \frac{1}{t} > 0,$$

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t \left[\frac{1}{A(u)} \exp \left(- \int_{t_0}^u \frac{b(s)}{A(s)} ds \right) \right]^{1/\gamma} du &= \int_1^t u^{-\frac{1}{4}} \left[\exp \left(- \int_1^u s^{-2} ds \right) \right]^{1/2} du \\ &= e^{-\frac{1}{2}} \int_1^t u^{-\frac{1}{4}} \exp \left(\frac{1}{2} u^{-1} \right) du \geq e^{-\frac{1}{2}} \int_1^t u^{-\frac{1}{4}} \left(1 + \frac{1}{4} u^{-1} \right) du \rightarrow +\infty (t \rightarrow +\infty), \end{aligned}$$

显然条件 $(H_1)-(H_5)$ 是满足的. 为简单起见, 在定理1中取 $\rho(t) = 1$, $H(t, s) = (t - s)^3$, $K(t) \equiv 1$, 则此时定理1即为推论2, 故有

$$\begin{aligned} &\frac{1}{t^k} \int_{t_0}^t (t-s)^k \rho(s) \left[\Phi(s) - \Psi(s) \left| \frac{\rho'(s)}{\rho(s)} - \frac{b(s)}{A(s)} - \frac{k}{t-s} \right|^{\gamma+1} \right] ds \\ &= \frac{1}{t^3} \int_1^t (t-s)^3 \left[\frac{1}{s} - \frac{3^{-3}}{2^{-6}(\theta M)^2} s^{-\frac{7}{2}} \left| \frac{1}{s^2} + \frac{3}{t-s} \right|^3 \right] ds = \frac{1}{t^3} \left[\frac{1}{3} - \frac{3t}{2} + 3t^2 + \frac{t^3}{6} (6 \ln t - 11) \right. \\ &\quad \left. - \frac{3^{-3}}{2^{-6}(\theta M)^2} \left(\frac{1888}{385} + \frac{456t}{143} + \frac{64t^2}{65} + \frac{2t^3}{17} + \frac{32t^{-11/2}}{12155} - \frac{16t^{-9/2}}{143} + \frac{12t^{-7/2}}{7} - \frac{54}{5} t^{-5/2} \right) \right] \\ &\rightarrow +\infty (t \rightarrow +\infty), \end{aligned}$$

因此推论2的条件全部满足, 于是由推论2知此时方程是振动的.

例2 若方程(1)中 $n = 2$, $t_0 = 1$, $\gamma = 1$, $A(t) = t^{\frac{2}{5}}$, $b(t) = t^{-\frac{34}{15}}$, $B(u) = u$, $\tau(t) = \sigma(t) = \frac{t}{2}$, $P(t) = \frac{1}{2}$, $Q(t) = t^2 \sin^2 t + \frac{1}{t^{11/10}}$, $R(t) = 2t^2 \sin^2 t$, $f(u) = u[2 + \ln^\gamma(1 + u^2)]$, $g(u) = \frac{u}{\sqrt{1 + \sin^4(u+1)}}$, 则容易验证条件 $(H_1)-(H_5)$ 是满足的. 同样取 $\rho(t) = 1$, $H(t, s) = (t - s)^2$, 这样

$$\begin{aligned} &\limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t^k} \int_{t_0}^t (t-s)^k \rho(s) \left[\Phi(s) - \Psi(s) \left| \frac{\rho'(s)}{\rho(s)} - \frac{b(s)}{A(s)} - \frac{k}{t-s} \right|^{\gamma+1} \right] ds \\ &= \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t^2} \int_1^t (t-s)^2 \left[\frac{1}{s^{11/10}} - \frac{2^{-2}}{2^{-1}} s^{\frac{2}{5}} \left| s^{-\frac{8}{5}} + \frac{2}{t-s} \right|^2 \right] ds \\ &= \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t^2} \left(\frac{451}{190} + \frac{27}{440^{5/3}} + \frac{43t}{72} - \frac{6t}{5} - \frac{2000t^{19/10}}{171} + \frac{217t^2}{22} + 2 \ln t \right) \\ &= \frac{217}{22} < +\infty, \end{aligned}$$

即此时式 (4) 是不成立的, 因此不能用定理 1 及其推论. 故只能用定理 2 或定理 3 来判定, 现用定理 2. 因为

$$\begin{aligned}
 & \lim_{t \rightarrow +\infty} \sup \frac{1}{H(t, T)} \int_T^t \rho(s) \frac{\psi(s)|h(t, s)|^{\gamma+1}}{H^\gamma(t, s)} ds = \lim_{t \rightarrow +\infty} \sup \frac{1}{(t-1)^2} \int_1^t (t-s)^2 \frac{2^{-2}}{2^{-1}} s^{\frac{2}{5}} \left| s^{-\frac{8}{3}} + \frac{2}{t-s} \right|^2 ds \\
 & = \lim_{t \rightarrow +\infty} \sup \frac{1}{(t-1)^2} \left(-\frac{1760}{203} - \frac{3375}{75284} t^{-\frac{29}{15}} + \frac{225}{38} t^{-\frac{4}{15}} + \frac{1035}{836} t + \frac{10}{7} t^{\frac{7}{5}} + \frac{15}{118} t^2 \right) = \frac{15}{118} < +\infty, \\
 & \frac{1}{H(t, u)} \rho(s) \left[H(t, s) \Phi(s) - \frac{\psi(s)|h(t, s)|^{\gamma+1}}{H^\gamma(t, s)} \right] ds \geq \frac{1}{t^2} \int_u^t (t-s)^2 \left[\frac{1}{s^{11/10}} - \frac{2^{-2}}{2^{-1}} s^{\frac{2}{5}} \left| s^{-\frac{8}{3}} + \frac{2}{t-s} \right|^2 \right] ds \\
 & = \frac{1}{t^2} \left\{ \left(\frac{3375}{75284} t^{-\frac{29}{15}} - \frac{225}{38} t^{-\frac{4}{15}} - \frac{10}{7} t^{\frac{7}{5}} - \frac{2000}{171} t^{\frac{19}{10}} \right) + \left(-\frac{15}{58} u^{-\frac{29}{15}} + \frac{15}{2} u^{-\frac{4}{15}} + \frac{10}{7} u^{\frac{7}{5}} - \frac{10}{19} u^{\frac{19}{10}} \right) \right. \\
 & \quad \left. + \frac{5t^2(-3u^{-59/15} + 236u^{19/10})}{118} + \frac{5t(513 - 2376u^{5/3} + 3344u^{23/6})}{7524u^{44/15}} \right\} \\
 & \rightarrow \frac{5(-3u^{-59/15} + 236u^{19/10})}{118} = \xi(u)(t \rightarrow +\infty), \\
 & \int_T^t \sigma^{n-2}(s) \sigma'(s) [\rho(s) A(s)]^{\frac{-1}{\gamma}} [\xi_+(s)]^{\frac{\gamma+1}{\gamma}} ds = \int_1^t \frac{1}{2} s^{-\frac{2}{5}} \left[\frac{5(-3s^{-59/15} + 236s^{19/10})}{118} \right]^2 ds \\
 & = \frac{5^3}{2 \times 118^2 \times 51557} \left(130523576 t^{\frac{22}{5}} + \frac{10186704}{t^{43/30}} - \frac{12771}{t^{109/15}} - 140697509 \right) \rightarrow +\infty (t \rightarrow +\infty),
 \end{aligned}$$

所以, 定理 2 的条件是满足的, 于是, 由定理 2 知, 此时方程是振动的. 但文献 [6-15] 中的定理均不能判定例 1 和例 2 中方程的振动性.

[参 考 文 献]

- [1] 杨甲山. 具正负系数和阻尼项的高阶微分方程的振动定理 [J]. 中山大学学报: 自然科学版, 2012, 51(1): 30-34.
- [2] AGARWAL R P, GRACE S R, REGAN D O. Oscillation Theory for Difference and Functional Differential Equations [M]. New York: Kluwer Academic Publishers, 2000.
- [3] GYORI I, LADAS G. Oscillation Theory for Delay Differential Equations with Applications [M]. Clarendon: Oxford, 1991.
- [4] AGARWAL R P, BOHNER M, LI W T. Nonoscillation and Oscillation: Theory for Functional Differential equations [M]. New York: Marcel Dekker, 2004.
- [5] LI W T, ZHONG C K, FAN X L. Oscillation criteria for second-order half-linear ordinary differential equations with damping [J]. Rocky Mountain J Math, 2003, 33(1): 1-26.
- [6] ZHANG Q X, YU Y H. Oscillation of even order half-linear functional differential equations with damping [J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 2010, 33(4): 601-610.
- [7] LI H J, YE H C C. An integral criterion for oscillation of nonlinear differential equations [J]. Math Japonica, 1995, 41: 185-188.
- [8] YANG X J. Oscillation criteria for nonlinear differential equations with damping [J]. Appl Math Comput, 2003, 136: 549-557.
- [9] WU H W, WANG Q R, XU Y T. Oscillation criteria for certain even order nonlinear functional differential equations [J]. Dynamic Systems and Applications, 2004, 13: 129-144.

(下转第 38 页)