文章编号: 1000-5641(2015)01-0084-11

1 阶复结构形变中产生 Bott-Chern 上同调群和 Aeppli 上同调群维数跳跃的障碍公式的解析证明

林洁珠[1], 叶轩明[2]

(1. 广州大学 数学与信息科学学院, 数学与交叉学科广东普通高校重点实验室, 广州 510006
2. 中山大学 数学与计算科学学院数学系, 广州 510275)

摘要: 设 X 为一个紧致复流形, 考虑 X 的任一复结构形变族 $\pi:\mathcal{X}\to B$, 则 X 的 Bott-Chern 上同调群和 Aeppli 上同调群的维数在此变化过程中可能产生跳跃现象. 在文献 [1] 中, Schweitzer 将 Bott-Chern 上同调群和 Aeppli 上同调群表示成为某一个层链 $\mathcal{L}^\bullet_{p,q}$ 的上同调群. 在文献 [2] 中, 作者通过研究 X 各阶形变中与 $\mathcal{L}^\bullet_{p,q}$[1]拟同构的层链 $\mathcal{B}^\bullet_{p,q}$ 的超上同调群等价类元素在延拓过程中的障碍来研究这一跳跃现象, 得到了产生此障碍的公式. 本文将给出 1 阶障碍公式的另一个用 $\mathcal{L}^\bullet_{p,q}$ 上同调计算的解析证明.

关键词: Bott-Chern上同调群; Aeppli 上同调群; 复结构形变; 障碍; Kodaira Spencer 类

中图分类号: O186 **文献标识码:** A **DOI:** 10.3969/j.issn.1000-5641.2015.01.010

An analytic proof for the formula of the first order obstruction making the dimensions of Bott-Chern cohomology groups and Aeppli cohomology groups jumping

Lin Jie-zhu[1], Ye Xuan-ming[2]

(1. *School of Mathematics And Information Science, Guangzhou University, Key Laboratory of Mathematics, and Interdisciplinary Sciences of Guangdong Higher Education Institutes, Guangzhou* 510006, *China*;
2. *School of Mathematics and Computational Science, Sun Yat-sen University, Guangzhou* 510275, *China*)

Abstract: Let X be a compact complex manifold, and let $\pi:\mathcal{X}\to B$ be a small deformation of X, the dimensions of the Bott-Chern cohomology groups or Aeppli cohomology groups may vary under this deformation. In [1], M. Schweitzer constructed a complex of sheaves $\mathcal{L}^\bullet_{p,q}$, and represented Bott-Chern cohomology groups or Aeppli cohomology groups as the cohomology groups of $\mathcal{L}^\bullet_{p,q}$. In [2], the author have studied this jumping phenomenon by studying the deformation obstructions of a hypercohomology class of a complex of sheaves $\mathcal{B}^\bullet_{p,q}$ which is quasi-isomorphic to $\mathcal{L}^\bullet_{p,q}$[1]. In particular, they

收稿日期: 2014-03

基金项目: 国家青年基金(11201090, 11201491); 博士点新教师类项目(20124410120001, 20120171120009); 高校基本科研业务费青年教师培育项目(34000-3161248)

第一作者: 林洁珠, 女, 副教授, 研究方向为数学物理、复微分几何. E-mail: jlin@gzhu.edu.cn.

通信作者: 叶轩明, 男, 讲师, 研究方向为复几何、复代数几何. E-mail: yexm3@mail.sysu.edu.cn.

obtain an explicit formula for the obstructions. In this paper, the formula of the first order obstruction is proved in another way by using cohomology of $\mathcal{L}^{\bullet}_{p,q}$.

Key words: Bott-Chern cohomology; Aeppli cohomology; deformation; obstruction; kodaira spencer class

0 引 言

设 X 为一紧致复流形, $\pi : \mathcal{X} \to B$ 是以复流形 X 为中心纤维的复结构形变簇. 记在 $t \in B$ 点处的 π 的纤维为 $X_t = \pi^{-1}(t)$ (关于复结构形变簇的介绍, 读者可以参考文 [3-4]). 记 X 的 Bott-Chern 上同调群和 Aeppli 上同调群分别为 $H^{p,q}_{\mathrm{BC}}(X)$ 和 $H^{p,q}_{\mathrm{A}}(X)$, 他们的维数 $h^{p,q}_{\mathrm{BC}}(X)$ 和 $h^{p,q}_{\mathrm{A}}(X)$ 是重要的复结构不变量. 在文献 [5] 中, Angella 讨论了 Iwasawa 流形在小的复结构形变中, $h^{p,q}_{\mathrm{BC}}(X)$ 和 $h^{p,q}_{\mathrm{A}}(X)$ 的变化情况, 给出了一个在小复结构形变过程中, $h^{p,q}_{\mathrm{BC}}(X)$ 和 $h^{p,q}_{\mathrm{A}}(X)$ 产生跳跃的例子.

在文献 [1] 中, Schweitzer 将 Bott-Chern 上同调群和 Aeppli 上同调群表示成为某一个层链 $\mathcal{L}^{\bullet}_{p,q}$ 的上同调群; 他还引进了另一个层链 $\mathcal{B}^{\bullet}_{p,q}$, 并证明了该层链与 $\mathcal{L}^{\bullet}_{p,q}$[1] 是拟同构的. 这意味着可以通过研究层链 $\mathcal{B}^{\bullet}_{p,q}$ 的超上同调的跳跃现象来研究 $h^{p,q}_{\mathrm{BC}}(X)$ 和 $h^{p,q}_{\mathrm{A}}(X)$ 的跳跃, 提供了研究 Bott-Chern 上同调群和 Aeppli 上同调群的重要工具. 在文献 [1] 中, 我们找出了在无穷小复结构形变中, $h^{p,q}_{\mathrm{BC}}(X)$ 和 $h^{p,q}_{\mathrm{A}}(X)$ 发生跳跃现象的“原因”. 从障碍理论的角度去研究这个问题, 确切地说, 给定一个复流形 X, 现考虑它的一个以底空间 B 为参数空间的复结构形变族 $\mathcal{X}$, 对于 X 任一 $\mathcal{B}^{\bullet}_{p,q}$ 的超上同调 $\mathbb{H}^l(X, \mathcal{B}^{\bullet}_{p,q})$ 的等价类 $[\theta]$. 找出将这个元素延拓成为相对超上同调群 $\mathbb{H}^l(\mathcal{X}, \mathcal{B}^{\bullet}_{p,q;\mathcal{X}/B})$ 里的一个等价类的障碍, 并称那些有非平凡障碍的元素为障碍元素. 实际上, 这些元素在研究无穷小复结构形变 $h^{p,q}_{\mathrm{BC}}(X)$ 和 $h^{p,q}_{\mathrm{A}}(X)$ 发生跳跃的现象中将扮演重要角色. 因为这类元素的存在, 是无穷小复结构形变中 $h^{p,q}_{\mathrm{BC}}(X)$ 和 $h^{p,q}_{\mathrm{A}}(X)$ 发生变化的充分条件(关于 Hodge 数和切层上同调群维数在复结构变化过程中的障碍理论可参考文献 [6]、[7]).

在文献 [2] 中, 解释了障碍元素和超上同调群 $\mathbb{H}^l(X, \mathcal{B}^{\bullet}_{p,q})$ 维数(从而也就是 $h^{p,q}_{\mathrm{BC}}(X)$ 和 $h^{p,q}_{\mathrm{A}}(X)$) 发生跳跃现象的关系如下.

定理 0.1[2] 设 $\pi : \mathcal{X} \to B$ 是以紧复流形 X 为中心纤维的复结构形变族. 现在考虑以 $t \in B$ 为变量的函数 $\dim\mathbb{H}^l(X(t), \mathcal{B}^{\bullet}_{p,q;t})$. 此函数将在 $t = 0$ 发生跳跃(减少)当且仅当存在 $\mathbb{H}^l(X, \mathcal{B}^{\bullet}_{p,q})$ 或者 $\mathbb{H}^{l-1}(X, \mathcal{B}^{\bullet}_{p,q})$ 中的等价类 $[\theta]$ 和一个自然数 $n \geqslant 1$ 使得该元素的 n 阶障碍

$$o_n([\theta]) \neq 0.$$

同时, 还得到计算障碍 $o_n([\theta])$ 的一个公式.

定理 0.2[2] 设 $\pi : \mathcal{X} \to B$ 是 $\pi^{-1}(0) = X$ 的一个复结构形变族, 其中 X 是一个紧复流形. 令 $\pi_n : X_n \to B_n$ 为 X 的 n 阶无穷小形变. 对于上同调群 $\mathbb{H}^l(X, \mathcal{B}^{\bullet}_{p,q})$ 的任一等价类 $[\theta]$, 如果, 能将其延拓到 $n-1$ 阶, 即将其延拓为上同调群 $\mathbb{H}^l(X_{n-1}, \mathcal{B}^{\bullet}_{p,q;X_{n-1}/B_{n-1}})$ 中的一个等价类 $[\theta_{n-1}]$, 则将 $[\theta]$ 延拓到 n 阶的障碍是

$$o_n([\theta]) = -\partial^{\bar{\partial},\mathcal{B}}_{X_{n-1}/B_{n-1}} \circ \kappa_n \llcorner \circ \partial^{\mathcal{B},\bar{\partial}}_{X_{n-1}/B_{n-1}}([\theta_{n-1}]) - \bar{\partial}^{\partial,\mathcal{B}}_{X_{n-1}/B_{n-1}} \circ \bar{\kappa}_n \llcorner \circ \bar{\partial}^{\mathcal{B},\partial}_{X_{n-1}/B_{n-1}}([\theta_{n-1}]),$$

其中 κ_n 是 n 阶 Kodaira-Spencer 类(关于 n 阶 Kodaira-Spencer 类的定义, 可参考文献 [8]) $\bar{\kappa}_n$ 是

$\bar{\mathcal{X}} \to \bar{B}$ 的 n 阶 Kodaira-Spencer 类. $\partial^{\bar{\partial},\mathcal{B}}_{X_{n-1}/B_{n-1}}$, $\bar{\partial}^{\partial,\mathcal{B}}_{X_{n-1}/B_{n-1}}$, $\partial^{\mathcal{B},\bar{\partial}}_{X_{n-1}/B_{n-1}}$ 和 $\bar{\partial}^{\mathcal{B},\partial}_{X_{n-1}/B_{n-1}}$ 是在文献 [2] 中定义的在同调群间的映射.

以上定理应用到研究 $h^{p,q}_{\mathrm{BC}}(X)$ 和 $h^{p,q}_{\mathrm{A}}(X)$ 的跳跃现象时, 得到以下定理.

定理 0.3[2] 设 $\pi : \mathcal{X} \to B$ 是 $\pi^{-1}(0) = X$ 的一个复结构形变族, 其中 X 是一个紧复流形. 令 $\pi_n : X_n \to B_n$ 为 X 的 n 阶无穷小形变. 如果存在上同调群 $H^{p,q}_{\mathrm{BC}}(X)$ 的一等价类 $[\theta^1]$ 或者存在上同调群 $H^{p-1,q-1}_{\mathrm{A}}(X)$ 的一等价类 $[\theta^2]$ 和一个自然数 $n \geqslant 1$ 使得 $o_n([\theta^1]) \neq 0$ 或者 $o_n([\theta^2]) \neq 0$, 则 $h^{p,q}_{\mathrm{BC}}(X(t))$ 会在 0 点发生跳跃. 其中 $o_n([\theta^1])$ 和 $o_n([\theta^2])$ 由下面公式给出:

$$o_n([\theta^1]) = -\partial^{\bar{\partial},\mathcal{B}}_{X_{n-1}/B_{n-1}} \circ \kappa_n \llcorner \circ r_{BC,\bar{\partial}}([\theta_{n-1}]) - \bar{\partial}^{\partial,\mathcal{B}}_{X_{n-1}/B_{n-1}} \circ \bar{\kappa}_n \llcorner \circ r_{BC,\partial}([\theta_{n-1}]);$$

$$o_n([\theta^2]) = -\partial^{\bar{\partial},BC}_{X_{n-1}/B_{n-1}} \circ \kappa_n \llcorner \circ \partial^{A,\bar{\partial}}_{X_{n-1}/B_{n-1}}([\theta_{n-1}]) - \bar{\partial}^{\partial,BC}_{X_{n-1}/B_{n-1}} \circ \bar{\kappa}_n \llcorner \circ \bar{\partial}^{A,\partial}_{X_{n-1}/B_{n-1}}([\theta_{n-1}]).$$

定理 0.4[2] 设 $\pi : \mathcal{X} \to B$ 是 $\pi^{-1}(0) = X$ 的一个复结构形变族, 其中 X 是一个紧复流形. 令 $\pi_n : X_n \to B_n$ 为 X 的 n 阶无穷小形变. 如果存在上同调群 $H^{p-1,q-1}_{\mathrm{A}}(X)$ 的一等价类 $[\theta^2]$ 或者存在上同调群 $\mathbb{H}^{q+p-2}(X, \mathcal{B}^{\bullet}_{p,q})$ 的一等价类 $[\theta^3]$ 和一个自然数 $n \geqslant 1$ 使得 $o_n([\theta^2]) \neq 0$ 或者 $o_n([\theta^3]) \neq 0$, 则 $h^{p-1,q-1}_{\mathrm{A}}(X(t))$ 会在 0 点发生跳跃. 其中 $o_n([\theta^2])$ 和 $o_n([\theta^3])$ 由下面公式给出:

$$o_n([\theta^2]) = -\partial^{\bar{\partial},BC}_{X_{n-1}/B_{n-1}} \circ \kappa_n \llcorner \circ \partial^{A,\bar{\partial}}_{X_{n-1}/B_{n-1}}([\theta_{n-1}]) - \bar{\partial}^{\partial,BC}_{X_{n-1}/B_{n-1}} \circ \bar{\kappa}_n \llcorner \circ \bar{\partial}^{A,\partial}_{X_{n-1}/B_{n-1}}([\theta_{n-1}]);$$

$$o_n([\theta^3]) = -r_{\bar{\partial},A} \circ \kappa_n \llcorner \circ \partial^{\mathcal{B},\bar{\partial}}_{X_{n-1}/B_{n-1}}([\theta_{n-1}]) - r_{\partial,A} \circ \bar{\kappa}_n \llcorner \circ \bar{\partial}^{\mathcal{B},\partial}_{X_{n-1}/B_{n-1}}([\theta_{n-1}]).$$

公式中各个算子的定义请参看文献 [2].

在本文中, 将给出以上定理 0.3 和定理 0.4 中的障碍公式在 $n = 1$ 的时候的一个用层链 $\mathcal{L}^{\bullet}_{p,q}$ 的上同调群计算的证明. 在 $n = 1$ 时, 以上的障碍公式变为: 对于任意给定的方向 $V_0 = \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial t_i} + \sum_j b_j \frac{\partial}{\partial \bar{t}_j} \in T^{\mathbb{C}}_0 B$,

1. $o_1(\theta^1, V_0)$ 为 $H^{q+p}(X, \mathcal{L}^{\bullet}_{p,q})$ 中的

$$o_1(\theta^1, V_0) = \partial_X(\mathrm{int}(\rho(V_0))(\theta^1)) + \bar{\partial}_X(\mathrm{int}(\bar{\rho}(V_0))(\theta^1));$$

2. $o_1(\theta^2, V_0)$ 为 $H^{p,q}_{\mathrm{BC}}(X)$ 中的

$$o_1(\theta^2, V_0) = \partial_X(\mathrm{int}(\rho(V_0))(\partial_X \theta^2)) + \bar{\partial}_X(\mathrm{int}(\bar{\rho}(V_0))(\bar{\partial}_X \theta^2));$$

3. $o_1(\theta^3, V_0)$ 为 $H^{p-1,q-1}_{\mathrm{A}}(X)$ 中的

$$o_1(\theta^3, V_0) = \mathrm{int}(\rho(V_0))(\partial_X \theta^{3;p-1,q-2}) + \mathrm{int}(\bar{\rho}(V_0))(\bar{\partial}_X \theta^{3;p-2,q-1}).$$

其中 $\rho : T^{1,0}_0 B \to H^1(X, T_X)$ 是 Kodaira-Spencer 映射, $\theta^{3;p,q}$ 表示 θ^3 的 p, q 分量.

在下文中, 将给出上面 1–3 的证明. 在此之前, 先介绍一下有关 Bott-Chern 上同调群和 Aeppli 上同调群的一些结果.

1 关于 Bott-Chern 上同调群和 Aeppli 上同调群

下文中关于 Bott-Chern 上同调群和 Aeppli 上同调群的结果都可以在文献 [1] 中找到. 令 X 为一紧致复流形. 我们知道 Dolbeault 上同调群 $H^{p,q}_{\bar{\partial}}(X)$ 或更一般的 Frölicher 谱序

列[9]中的 $E_r^{p,q}(X)$ 都是复流形的有限维不变量; 另一方面在文献 [10-11] 定义的 Bott-Chern 上同调群和 Aeppli 上同调群给出了更多的 X 的复结构不变量, 它们的定义分别为

$$H_{\mathrm{BC}}^{p,q}(X)=\frac{\ker\{d\colon \mathcal{A}^{p,q}(X)\longrightarrow \mathcal{A}^{p+q+1}(X)\}}{\mathrm{im}\,\{\partial\bar{\partial}\colon \mathcal{A}^{p-1,q-1}(X)\longrightarrow \mathcal{A}^{p,q}(X)\}}$$

和

$$H_{\mathrm{A}}^{p,q}(X)=\frac{\ker\{\partial\bar{\partial}\colon \mathcal{A}^{p,q}(X)\longrightarrow \mathcal{A}^{p+1,q+1}(X)\}}{\mathrm{im}\,\{\partial\colon \mathcal{A}^{p-1,q}(X)\longrightarrow \mathcal{A}^{p,q}(X)\}+\mathrm{im}\,\{\bar{\partial}\colon \mathcal{A}^{p,q-1}(X)\longrightarrow \mathcal{A}^{p,q}(X)\}}.$$

由 Hodge 定理知道, 所有的这些不变量都是有限维并且有这样的同构

$$H_{\mathrm{A}}^{p,q}(X)\cong H_{\mathrm{BC}}^{n-q,n-p}(X)$$

和由复共轭给出的同构 $H_{\mathrm{BC}}^{q,p}(X)\cong H_{\mathrm{BC}}^{p,q}(X)$. 对于所有的 $r\geqslant 1$ 和所有的 p,q, 存在以下自然的映射

$$H_{\mathrm{BC}}^{p,q}(X)\longrightarrow E_r^{p,q}(X);\quad E_r^{p,q}(X)\longrightarrow H_{\mathrm{A}}^{p,q}(X).$$

注意到其中 $E_1^{p,q}(X)\cong H_{\bar{\partial}}^{p,q}(X)$ 而 $r=\infty$ 项给出了 de Rham 上同调群的分解, 即: $H_{\mathrm{dR}}^k(X,\mathbb{C})\cong\oplus_{p+q=k}E_\infty^{p,q}(X)$. 记 $h_{\mathrm{BC}}^{p,q}(X)$ 和 $h_{\mathrm{A}}^{p,q}(X)$ 分别为 $H_{\mathrm{BC}}^{p,q}(X)$ 和 $H_{\mathrm{A}}^{p,q}(X)$ 的维数. 对于所有 $p\geqslant 1,q\geqslant 1$, 定义层链 $\mathcal{L}_{p,q}^\bullet$ 为

$$\mathcal{L}_{p,q}^k=\bigoplus_{\substack{r+s=k\\ r<p,s<q}}\mathcal{A}^{r,s},\quad 如果\ k\leqslant p+q-2,$$

$$\mathcal{L}_{p-1,q-1}^{k-1}=\bigoplus_{\substack{r+s=k\\ r\geqslant p,s\geqslant q}}\mathcal{A}^{r,s},\quad 如果\ k\geqslant p+q,$$

和链算子

$$\mathcal{L}_{p,q}^0\overset{pr_{\mathcal{L}_{p,q}^1}\circ d}{\to}\mathcal{L}_{p,q}^1\overset{pr_{\mathcal{L}_{p,q}^2}\circ d}{\to}\ldots\to\mathcal{L}_{p,q}^{p+q-2}\overset{\partial\bar{\partial}}{\to}\mathcal{L}_{p,q}^{p+q-1}\overset{d}{\to}\mathcal{L}_{p,q}^{p+q}\overset{d}{\to}\ldots$$

以下记 $d_X^{(\bullet)}$ 为层链 $\mathcal{L}_{p,q}^\bullet$ 的链算子, 即当 $i<p+q-2$ 时, $d_X^{(i)}=pr_{\mathcal{L}_{p,q}^{i+1}}\circ d$, 当 $i=p+q-2$ 时, $d_X^{(i)}=\partial\bar{\partial}$, 当 $i>p+q-2$ 时, $d_X^{(i)}=d$. 因为 $\mathcal{L}_{p,q}^k$ 都是松软的, 由以上构造, 有以下同构

$$H_{\mathrm{BC}}^{p,q}(X)=H^{p+q-1}(\mathcal{L}_{p,q}^\bullet(X))\cong\mathbb{H}^{p+q-1}(X,\mathcal{L}_{p,q}^\bullet),$$

$$H_{\mathrm{A}}^{p,q}(X)=H^{p+q}(\mathcal{L}_{p+1,q+1}^\bullet(X))\cong\mathbb{H}^{p+q}(X,\mathcal{L}_{p+1,q+1}^\bullet).$$

接下来, 我们定义 $\mathcal{L}_{p,q}^\bullet$ 的一个子链$\mathcal{S}_{p,q}^\bullet$ 为

$$({\mathcal{S}'}_p^\bullet,\partial):\ \mathcal{O}\to\Omega^1\to\ldots\to\Omega^{p-1}\to 0,\qquad ({\mathcal{S}''}_q^\bullet,\bar{\partial}):\ \bar{\mathcal{O}}\to\bar{\Omega}^1\to\ldots\to\bar{\Omega}^{q-1}\to 0,$$

$$\mathcal{S}_{p,q}^\bullet={\mathcal{S}'}_p^\bullet+{\mathcal{S}''}_q^\bullet:\ \mathcal{O}+\bar{\mathcal{O}}\to\Omega^1\oplus\bar{\Omega}^1\to\ldots\Omega^{p-1}\oplus\bar{\Omega}^{p-1}\to\bar{\Omega}^p\to\ldots\to\bar{\Omega}^{q-1}\to 0.$$

其中嵌入 $\mathcal{S}^\bullet\subset\mathcal{L}^\bullet$ 是一个拟同构[1].

文献 [1] 中还构造了另一个层链 $\mathcal{B}_{p,q}^\bullet$ 是

$$\mathcal{B}_{p,q}^\bullet:\ \mathbb{C}\overset{(+,-)}{\to}\mathcal{O}\oplus\bar{\mathcal{O}}\to\Omega^1\oplus\bar{\Omega}^1\to\ldots\Omega^{p-1}\oplus\bar{\Omega}^{p-1}\to\bar{\Omega}^p\to\ldots\to\bar{\Omega}^{q-1}\to 0.$$

则以下 $\mathcal{B}^\bullet_{p,q}$ 到$\mathcal{S}^\bullet_{p,q}[1]$ 的态射是拟同构[1]

$$
\begin{array}{ccccccc}
\mathbb{C} & \xrightarrow{(+,-)} & \mathcal{O}\oplus\bar{\mathcal{O}} & \to & \Omega^1\oplus\bar{\Omega}^1 & \to & \dots \\
\downarrow & & \downarrow + & & \downarrow & & \\
0 & \to & \mathcal{O}+\bar{\mathcal{O}} & \to & \Omega^1\oplus\bar{\Omega}^1 & \to & \dots.
\end{array}
$$

由此得到下面在超上同调的同构

$$H^{p,q}_{\mathrm{BC}}(X)\cong H^{p+q}(X,\mathcal{L}^\bullet_{p,q}[1])\cong\mathbb{H}^{p+q}(X,\mathcal{S}^\bullet_{p,q}[1])\cong\mathbb{H}^{p+q}(X,\mathcal{B}^\bullet_{p,q})$$

和

$$H^{p,q}_{\mathrm{A}}(X)\cong H^{p+q}(X,\mathcal{L}^\bullet_{p+1,q+1})\cong\mathbb{H}^{p+q}(X,\mathcal{S}^\bullet_{p+1,q+1})\cong\mathbb{H}^{p+q+1}(X,\mathcal{B}^\bullet_{p+1,q+1}).$$

2 关于 $o_1(\theta^\sharp, V_0)$, 其中 $\sharp\in\{1,\,2,\,3\}$

现考虑复结构形变簇 $\pi:\mathcal{X}\to B$, 其中 $\pi^{-1}(0)=X$, X 为紧复流形. 记令 $\mathcal{C}^\omega_B$ 为 B 上的复值实解析函数层, $\mathcal{O}^\omega_{\mathcal{X}}$ 为 $\mathcal{X}$ 上的在 π 的纤维方向为全纯, B 方向上是实解析的复值函数层. $\bar{\mathcal{O}}^\omega_{\mathcal{X}}$ 为 $\mathcal{X}$ 上的在 π 的纤维方向为反全纯, B 方向上是实解析的复值函数层. 令 m^ω_0 为 $\mathcal{C}^\omega_B$, 的极大理想, $\mathcal{M}^\omega_0=\pi^{-1}(m^\omega_0)\otimes_{\pi^{-1}(\mathcal{C}^\omega_B)}\mathcal{O}^\omega_{\mathcal{X}}$, $\bar{\mathcal{M}}^\omega_0=\pi^{-1}(m^\omega_0)\otimes_{\pi^{-1}(\mathcal{C}^\omega_B)}\bar{\mathcal{O}}^\omega_{\mathcal{X}}$.

对于任意的群 $\mathbb{H}^l(X,\mathcal{B}^\bullet_{p,q})$ 中的等价类$[\theta]$, 我们希望将 $[\theta]$ 延拓成为一个 $d^{(l)}_t$-闭的截面 θ_t (其中, d_t 是 X_t 上的层链 $\mathcal{L}^\bullet_{p,q}$ 的第 l 阶微分算子). 现在, 考虑以下的短正合列

$$0\to\mathcal{M}^\omega_0/(\mathcal{M}^\omega_0)^2\otimes\mathcal{B}^\bullet_{p,q;X_0/B_0}\to\mathcal{B}^\bullet_{p,q;X_1/B_1}\to\mathcal{B}^\bullet_{p,q;X_0/B_0}\to 0. \tag{1}$$

这个短正合列诱导了下面的长正合列

$$0\to\mathbb{H}^0(X_1,\mathcal{M}^\omega_0/(\mathcal{M}^\omega_0)^2\otimes\mathcal{B}^\bullet_{p,q;X_0/B_0})\to\mathbb{H}^0(X_1,\mathcal{B}^\bullet_{p,q;X_1/B_1})\to\mathbb{H}^0(X,\mathcal{B}^\bullet_{p,q;X_0/B_0})$$

$$\to\mathbb{H}^1(X_1,\mathcal{M}^\omega_0/(\mathcal{M}^\omega_0)^2\otimes\mathcal{B}^\bullet_{p,q;X_0/B_0})\to....$$

其中 $\mathcal{B}^\bullet_{p,q;X_n/B_n}$ 和 $\mathcal{M}^\omega_0/(\mathcal{M}^\omega_0)^2\otimes\mathcal{B}^\bullet_{p,q;X_0/B_0}$ 的定义见文献 [2], X_1 为 X 的 1 阶段无穷小邻域. 现考虑这个长正合列连接映射

$$\delta^*:\mathbb{H}^l(X,\mathcal{B}^\bullet_{p,q;X_0/B_0})\to\mathbb{H}^{l+1}(X_1,\mathcal{M}^\omega_0/(\mathcal{M}^\omega_0)^2\otimes\mathcal{B}^\bullet_{p,q;X_0/B_0}).$$

由以上分析, 当且仅当在上同调群 $\mathbb{H}^{l+1}(X_1,\mathcal{M}^\omega_0/(\mathcal{M}^\omega_0)^2\otimes\mathcal{B}^\bullet_{p,q;X_0/B_0})$ 中的 $\delta^*([\theta])$ 是平凡的时候, 可以得到 θ 的一阶延拓. 另一方面, 因为

$$\mathbb{H}^{l+1}(X_1,\mathcal{M}^\omega_0/(\mathcal{M}^\omega_0)^2\otimes\mathcal{B}^\bullet_{p,q;X_0/B_0})\cong m^\omega_0/(m^\omega_0)^2\otimes_{\mathbb{C}}\mathbb{H}^{l+1}(X,\mathcal{B}^\bullet_{p,q;X_0/B_0})$$

和

$$T^{\mathbb{C}}_0B\cong\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(m^\omega_0/(m^\omega_0)^2,\mathbb{C}),$$

所以, 有

$$\mathbb{H}^{l+1}(X_1,\mathcal{M}^\omega_0/(\mathcal{M}^\omega_0)^2\otimes\mathcal{B}^\bullet_{p,q;X_0/B_0})\cong\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(T^{\mathbb{C}}_0B,\mathbb{H}^{l+1}(X,\mathcal{B}^\bullet_{p,q;X_0/B_0})).$$

因此, 如果取定方向 V_0 之后, 能对 $\theta^\sharp$ 进行一阶延拓当且仅当在 $\mathbb{H}^{l+1}(X,\mathcal{B}^\bullet_{p,q;X_0/B_0})$ 中的 $\delta^*(\theta^\sharp)(V_0)$ 是平凡的. 称 $o_1(\theta^\sharp,V_0)=\delta^*(\theta^\sharp)(V_0)$ 为一阶障碍, 并且我们将给出其具体的计算公式.

3 用层链 $\mathcal{L}^\bullet_{p,q;\mathcal{X}/B}$ 上同调群求 $o_1(\theta^\sharp,V_0)$

记 $j:X\hookrightarrow\mathcal{X}$ 为 X 在 $\mathcal{X}$ 中的嵌入映射, X^ω_∞ 为 X 的 ∞ 阶无穷小邻域, 即拓扑空间为 X, 结构层为 $j^{-1}\mathcal{O}^\omega_{\mathcal{X}}$ 的复解析空间. 记以下 X^ω_∞ 上的链层

$$\pi^{-1}((m^\omega_0)^n)\overset{(+,-)}{\to}(\mathcal{M}^\omega_0)^n\otimes\mathcal{O}^\omega_{\mathcal{X}/B}\oplus(\bar{\mathcal{M}}^\omega_0)^n\otimes\bar{\mathcal{O}}^\omega_{\mathcal{X}/B}\to(\mathcal{M}^\omega_0)^n\otimes\Omega^{1;\omega}_{\mathcal{X}/B}\oplus(\bar{\mathcal{M}}^\omega_0)^n\otimes\bar{\Omega}^{1;\omega}_{\mathcal{X}/B}\to\dots$$

$$(\mathcal{M}^\omega_0)^n\otimes\Omega^{p-1;\omega}_{\mathcal{X}/B}\oplus(\bar{\mathcal{M}}^\omega_0)^n\otimes\bar{\Omega}^{p-1;\omega}_{\mathcal{X}/B}\to(\bar{\mathcal{M}}^\omega_0)^n\otimes\bar{\Omega}^{p;\omega}_{\mathcal{X}/B}\to\dots\to(\bar{\mathcal{M}}^\omega_0)^n\otimes\bar{\Omega}^{q-1;\omega}_{\mathcal{X}/B}\to 0$$

为: $(\mathcal{M}^\omega_0)^n\otimes\mathcal{B}^\bullet_{p,q;\mathcal{X}/B}$;

$$\pi^{-1}(\mathcal{C}^\omega_{B,0})\overset{(+,-)}{\to}\mathcal{O}^\omega_{\mathcal{X}/B}\oplus\bar{\mathcal{O}}^\omega_{\mathcal{X}/B}\to\Omega^{1;\omega}_{\mathcal{X}/B}\oplus\bar{\Omega}^{1;\omega}_{\mathcal{X}/B}\to\dots$$

$$\Omega^{p-1;\omega}_{\mathcal{X}/B}\oplus\bar{\Omega}^{p-1;\omega}_{\mathcal{X}/B}\to\bar{\Omega}^{p;\omega}_{\mathcal{X}/B}\to\dots\to\bar{\Omega}^{q-1;\omega}_{\mathcal{X}/B}\to 0$$

为: $\mathcal{B}^\bullet_{p,q;\mathcal{X}/B}$.

记 $\mathcal{A}^{p,q;\omega}_{\mathcal{X}}$ 为 $\mathcal{X}$ 上在 π 的纤维方向上光滑在 B 因此方向上是实解析的 (p,q) 形式形成的层, $\mathcal{A}^{p,q;\omega}_{\mathcal{X}/B}$ 为在 $\mathcal{X}$ 上在 π 的纤维方向上光滑在 B 方向上是实解析的相对 (p,q) 形式形成的层. 将这些层限制在 X^ω_∞ 上, 考虑以下层链 $\mathcal{L}^\bullet_{p,q;\mathcal{X}/B}$

$$\mathcal{L}^k_{p,q;\mathcal{X}/B}=\bigoplus_{\substack{r+s=k\\ r<p,s<q}}\mathcal{A}^{r,s;\omega}_{\mathcal{X}/B},\quad \text{如果 } k\leqslant p+q-2,$$

$$\mathcal{L}^{k-1}_{p-1,q-1;\mathcal{X}/B}=\bigoplus_{\substack{r+s=k\\ r\geqslant p,s\geqslant q}}\mathcal{A}^{r,s;\omega}_{\mathcal{X}/B},\quad \text{如果 } k\geqslant p+q,$$

和链算子

$$\mathcal{L}^0_{p,q;\mathcal{X}/B}\overset{pr_{\mathcal{L}^1_{p,q;\mathcal{X}/B}}\circ d_{\mathcal{X}/B}}{\longrightarrow}\mathcal{L}^1_{p,q;\mathcal{X}/B}\overset{pr_{\mathcal{L}^2_{p,q;\mathcal{X}/B}}\circ d_{\mathcal{X}/B}}{\longrightarrow}\dots\to\mathcal{L}^{p+q-2}_{p,q;\mathcal{X}/B}$$

$$\overset{\partial_{\mathcal{X}/B}\bar{\partial}_{\mathcal{X}/B}}{\longrightarrow}\mathcal{L}^{p+q-1}_{p,q;\mathcal{X}/B}\overset{d_{\mathcal{X}/B}}{\longrightarrow}\mathcal{L}^{p+q}_{p,q;\mathcal{X}/B}\overset{d_{\mathcal{X}/B}}{\longrightarrow}\dots$$

以下记 $d^{(\bullet)}_{\mathcal{X}/B}$ 为层链 $\mathcal{L}^\bullet_{p,q;\mathcal{X}/B}$ 的链算子, 即当 $i<p+q-2$ 时 $d^{(i)}_{\mathcal{X}/B}=pr_{\mathcal{L}^{i+1}_{p,q}}\circ d_{\mathcal{X}/B}$, 当 $i=p+q-2$ 时, $d^{(i)}_{\mathcal{X}/B}=\partial_{\mathcal{X}/B}\circ\bar{\partial}_{\mathcal{X}/B}$, 当 $i>p+q-2$ 时, $d^{(i)}_{\mathcal{X}/B}=d_{\mathcal{X}/B}$. 由和第 1 节相同的讨论, 得到: $\mathcal{B}^\bullet_{p,q;\mathcal{X}/B}$ 和 $\mathcal{L}^\bullet_{p,q;\mathcal{X}/B}$[1] 是拟同构的. 因为我们考虑的是一个局部的问题, 所以不妨假设 B 是复平面上 0 点的一个小邻域. 在这种情况下, $\mathcal{A}^{p,q;\omega}_{\mathcal{X}/B}$ 是整体函子零调层, 因而有

$$\mathbb{H}^{l+1}(X^\omega_\infty,\mathcal{B}^\bullet_{p,q;\mathcal{X}/B})=\frac{\ker(L^l_{p,q;\mathcal{X}/B}\to L^{l+1}_{p,q;\mathcal{X}/B})}{\operatorname{im}(L^{l-1}_{p,q;\mathcal{X}/B}\to L^l_{p,q;\mathcal{X}/B})}.$$

其中, $L^l_{p,q;\mathcal{X}/B}$ 为 X^ω_∞ 上 的 $\mathcal{L}^l_{p,q;\mathcal{X}/B}$ 的全部整体截面.

由前一节的讨论知道, 为了计算 $o_1(\theta^\sharp, V_0)$, 要考虑正合列 (1), 因为希望通过相对比较直观解析的方法来计算这个障碍. 但是 $\mathcal{B}^\bullet_{p,q;X_1/B_1}$ 因为没有相应的零调层分解, 所以考虑下面这个层链正合列

$$0 \to \mathcal{M}_0^\omega \otimes \mathcal{B}^\bullet_{p,q;\mathcal{X}/B} \to \mathcal{B}^\bullet_{p,q;\mathcal{X}/B} \to \mathcal{B}^\bullet_{p,q;X_0/B_0} \to 0, \tag{2}$$

而不是正合列(1). 短正合列(2)诱导了下面的长正合列

$$0 \to \mathbb{H}^0(X_\infty^\omega, \mathcal{M}_0^\omega \otimes \mathcal{B}^\bullet_{p,q;\mathcal{X}/B}) \to \mathbb{H}^0(X_\infty^\omega, \mathcal{B}^\bullet_{p,q;\mathcal{X}/B}) \to \mathbb{H}^0(X, \mathcal{B}^\bullet_{p,q;X_0/B_0})$$

$$\to \mathbb{H}^1(X_\infty^\omega, \mathcal{M}_0^\omega \otimes \mathcal{B}^\bullet_{p,q;\mathcal{X}/B}) \to ...,$$

以及连接映射

$$\delta_\infty^* : \mathbb{H}^l(X, \mathcal{B}^\bullet_{p,q;X_0/B_0}) \to \mathbb{H}^{l+1}(X_\infty^\omega, \mathcal{M}_0^\omega \otimes \mathcal{B}^\bullet_{p,q;\mathcal{X}/B}).$$

另一方面, 因为有短正合列

$$0 \to (\mathcal{M}_0^\omega)^2 \otimes \mathcal{B}^\bullet_{p,q;\mathcal{X}/B} \to \mathcal{M}_0^\omega \otimes \mathcal{B}^\bullet_{p,q;\mathcal{X}/B} \to (\mathcal{M}_0^\omega)/(\mathcal{M}_0^\omega)^2 \otimes \mathcal{B}^\bullet_{p,q;X_0/B_0} \to 0 \tag{3}$$

诱导的映射

$$\phi : \mathbb{H}^{l+1}(X_\infty^\omega, \mathcal{M}_0^\omega \otimes \mathcal{B}^\bullet_{p,q;\mathcal{X}/B}) \to \mathbb{H}^{l+1}(X, (\mathcal{M}_0^\omega)/(\mathcal{M}_0^\omega)^2 \otimes \mathcal{B}^\bullet_{p,q;X_0/B_0}),$$

不难验证

$$\delta^* = \phi \circ \delta_\infty^* : \mathbb{H}^l(X, \mathcal{B}^\bullet_{p,q;X_0/B_0}) \to \mathbb{H}^{l+1}(X_\infty^\omega, \mathcal{M}_0^\omega \otimes \mathcal{B}^\bullet_{p,q;\mathcal{X}/B}) \to \mathbb{H}^{l+1}$$

$$(X, (\mathcal{M}_0^\omega)/(\mathcal{M}_0^\omega)^2 \otimes \mathcal{B}^\bullet_{p,q;X_0/B_0}).$$

因此, 为了计算 $\delta^*([\theta])$, 不能只考虑 $\delta_\infty^*([\theta])$, 还需要考虑如何求映射 ϕ.

现考虑如下映射

$$\phi' : \mathbb{H}^{l+1}(X_\infty^\omega, \mathcal{M}_0^\omega \otimes \mathcal{B}^\bullet_{p,q;\mathcal{X}/B}) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(T_0^{\mathbb{C}} B, \mathbb{H}^{l+1}(X, \mathcal{B}^\bullet_{p,q;X_0/B_0}))$$

其中, ϕ' 的具体定义如下, 对于任意的 $\mathbb{H}^{l+1}(X_\infty^\omega, \mathcal{M}_0^\omega \otimes \mathcal{B}^\bullet_{p,q;\mathcal{X}/B})$ 中的等价类$[\omega_t]$. 定义 $\phi'([\omega_t])$ 为 $T_0^{\mathbb{C}} B \to \mathbb{H}^{l+1}(X, \mathcal{B}^\bullet_{p,q;X_0/B_0}))$ 映射如下: 令 Ω_t 为 $L^l_{p,q;\mathcal{X}}$ 的一个截面, 满足其商映射 φ 的象为 ω_t. 取定 V_0 后, 定义

$$\phi'([\omega_t])(V_0) := \varphi(L_V(\Omega_t))|_X.$$

其中, L_V 为 $\mathcal{X}$ 上的 Lie 导数, V 为 $\mathcal{X}$ 的光滑切向量场, 且满足 $\pi_*(V)(0) = V_0$. 关于以上映射, 有以下引理.

引理 3.1 上述映射 ϕ' 是的定义是合理的, 且有

$$\phi' = \phi : \mathbb{H}^{l+1}(X_\infty^\omega, \mathcal{M}_0^\omega \otimes \mathcal{B}^\bullet_{p,q;\mathcal{X}/B}) \to \mathbb{H}^{l+1}(X, (\mathcal{M}_0^\omega)/(\mathcal{M}_0^\omega)^2 \otimes \mathcal{B}^\bullet_{p,q;X_0/B_0})$$
$$\cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(T_0^{\mathbb{C}} B, \mathbb{H}^{l+1}(X, \mathcal{B}^\bullet_{p,q;X_0/B_0})).$$

证 明 首先我们要计算ϕ'. 设B在0点附近的局部坐标为t_i，对于任意的$\mathbb{H}^{l+1}(X_\infty^\omega, \mathcal{M}_0^\omega\otimes\mathcal{B}^\bullet_{p,q;\mathcal{X}/B})$中的等价类$[\omega_t]$. 设$\omega_t=\sum_i t_i\omega_{t,i}+\sum_i \bar{t}_i\omega_{\bar{t},i}$, 则$\Omega_t$可以表示为

$$\Omega_t=\sum_i t_i\omega_{t,i}+\sum_i \bar{t}_i\omega_{\bar{t},i}+\sum_i \mathrm{d}t_i\wedge\psi_i+\sum_i \mathrm{d}\bar{t}_i\wedge\psi_i'+\Omega'.$$

其中, Ω'是在$\pi^*\bigwedge^2\mathcal{A}_B^1\bigwedge\mathcal{A}_{\mathcal{X}}^\bullet$中, $\mathrm{d}t_i, \mathrm{d}\bar{t}_i$项不出现在$\omega_{t,i}$, ψ_i和ψ_i'中. 所以有

$$\mathrm{d}\Omega_t=\sum_i \mathrm{d}t_i\wedge\omega_{t,i}+\sum_i t_i\mathrm{d}\omega_{t,i}+\sum_i \mathrm{d}\bar{t}_i\wedge\omega_{\bar{t},i}+\sum_i \bar{t}_i\mathrm{d}\omega_{\bar{t},i}-\sum_i \mathrm{d}t_i\wedge\mathrm{d}\psi_i-\sum_i \mathrm{d}\bar{t}_i\wedge\mathrm{d}\psi_i'+\mathrm{d}\Omega'.$$

取定方向$\sum_i a_i\frac{\partial}{\partial t_i}+\sum_j b_j\frac{\partial}{\partial \bar{t}_j}$, 有

$$\varphi\Big(\mathrm{int}\Big(\sum_i a_i\frac{\partial}{\partial t_i}+\sum_j b_j\frac{\partial}{\partial \bar{t}_j}\Big)\mathrm{d}\Omega_t\Big)\Big|_X=\sum_i a_i\omega_{t,i|X}+\sum_j b_j\omega_{\bar{t},j|X}-\sum_i a_i d\psi_{i|X}-\sum_j b_j d\psi_j'\Big|_X.$$

$\mathrm{int}(\cdot)(\cdot)$表示切向量场和形式作内积, 而

$$\varphi\Big(\mathrm{d}\Big(\mathrm{int}\Big(\sum_i a_i\frac{\partial}{\partial t_i}+\sum_j b_j\frac{\partial}{\partial \bar{t}_j}\Big)(\Omega_t)\Big)\Big)\Big|_X=\sum_i a_i\mathrm{d}\psi_{i|X}+\sum_j b_j\mathrm{d}\psi_j'\Big|_X.$$

设V纤维方向上的分量为V_X, 因为$\varphi(\mathrm{int}(V_X)\mathrm{d}\Omega_t)|_X+\varphi(\mathrm{d}(\mathrm{int}(V_X)(\Omega_t)))|_X=0$, 所以得到

$$\begin{aligned}&\phi'\Big(\Big[\sum_i t_i\omega_{t,i}+\sum_i \bar{t}_i\omega_{\bar{t},i}\Big)\Big(\sum_i a_i\frac{\partial}{\partial t_i}+\sum_j b_j\frac{\partial}{\partial \bar{t}_j}\Big)=\varphi(L_V(\Omega_t))\Big|_X\\ &=\varphi\Big(\mathrm{int}\Big(\sum_i a_i\frac{\partial}{\partial t_i}+\sum_j b_j\frac{\partial}{\partial \bar{t}_j}\Big)\mathrm{d}\Omega_t\Big)\Big|_X+\varphi\Big(\mathrm{d}\Big(\mathrm{int}\Big(\sum_i a_i\frac{\partial}{\partial t_i}+\sum_j b_j\frac{\partial}{\partial \bar{t}_j}\Big)(\Omega_t)\Big)\Big)\Big|_X\\ &=\sum_i a_i\omega_{t,i}\Big|_X+\sum_j b_j\omega_{\bar{t},j}\Big|_X.\end{aligned}$$

为了证明ϕ'的定义是合理的, 我们需要证明:

(I) $\phi'([\omega_t])(V_0)$不依赖于等价类$[\omega_t]$的代表元ω_t的选取;

(II) $\phi'([\omega_t])(V_0)$只依赖于向量场V_X在0点的值;

(III) $\phi'([\omega_t])(V_0)$是闭的.

首先证明(II), 给定V_0, 现考虑向量场V, 满足V为$\mathcal{X}$的切向量场, 且$\pi_*(V)(0)=V_0$. 因为$\phi'([\omega_t])(V_0)$是取Lie导数, φ作用后再限制在X上, 所以只依赖于$V|_X$. 且从上面计算可以看到, 实际上$\phi'([\omega_t])(V_0)$只依赖于V_0，而不依赖于$V|_X$在X切向上的分量.

现证明(III), 因为$\sum_i t_i\omega_{t,i}+\sum_i \bar{t}_i\omega_{\bar{t},i}$是$d^{(l)}_{\mathcal{X}/B}$闭的. 所以$\omega_{t,i|X}$, $\omega_{\bar{t},i|X}$也是$d_X^{(l)}$闭的, 从而$\sum_i a_i\omega_{t,i}|_X+\sum_j b_j\omega_{\bar{t},j}|_X$是$d_X^{(l)}$闭的. 由上面计算知道, $\phi'([\sum_i t_i\omega_{t,i}+\sum_i \bar{t}_i\omega_{\bar{t},i}])(\sum_i a_i\frac{\partial}{\partial t_i}+\sum_j b_j\frac{\partial}{\partial \bar{t}_j})$是$d_X^{(l)}$闭的.

再看(I), 现设ω_t'为等价类$[\omega_t]$的另一个代表元. 所以, 存在$\mathcal{L}^{l-1}_{p,q;\mathcal{X}/B}$的整体截面$\beta_{t,i}$, $\beta_{\bar{t},i}$, 使得$d^{(l-1)}_{\mathcal{X}/B}(\beta_{t,i})=\omega_{t,i}'-\omega_{t,i}$, $d^{(l-1)}_{\mathcal{X}/B}(\beta_{\bar{t},i})=\omega_{\bar{t},i}'-\omega_{\bar{t},i}$. 类似于前面的计算,

$$\phi'(\omega_t'-\omega_t)\Big(\sum_i a_i\frac{\partial}{\partial t_i}+\sum_j b_j\frac{\partial}{\partial \bar{t}_j}\Big)=d_X^{(l-1)}\Big(\Big(\sum_i a_i\beta_{t,i}+\sum_j b_j\beta_{\bar{t},j}\Big)\Big|_X\Big),$$

即 $\phi'([\omega_t])(\sum_i a_i \frac{\partial}{\partial t_i} + \sum_j b_j \frac{\partial}{\partial \bar{t}_j})$ 不依赖于等价类 $[\omega_t]$ 的代表元 ω_t 的选取.

根据定义

$$\begin{aligned}\phi : \mathbb{H}^{l+1}(X^{\omega}_{\infty}, \mathcal{M}^{\omega}_0 \otimes \mathcal{B}^{\bullet}_{p,q;\mathcal{X}/B}) &\to \mathbb{H}^{l+1}(X, (\mathcal{M}^{\omega}_0)/(\mathcal{M}^{\omega}_0)^2 \otimes \mathcal{B}^{\bullet}_{p,q;X_0/B_0}) \\ &\cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(T^{\mathbb{C}}_0 B, \mathbb{H}^{l+1}(X, \mathcal{B}^{\bullet}_{p,q;X_0/B_0})) \\ &\Big[\sum_i t_i\omega_{t,i} + \sum_i \bar{t}_i\omega_{\bar{t},i}\Big] \mapsto \Big[\sum_i t_i\omega_{t,i}\Big|_X + \sum_i \bar{t}_i\omega_{\bar{t},i}\Big|_X\Big] \\ &\mapsto \sum_i \mathrm{d}t_i \otimes [\omega_{t,i}|_X] + \sum_i \mathrm{d}\bar{t}_i \otimes [\omega_{\bar{t},i}|_X]\end{aligned}$$

对比前面的结果, 得到 $\phi' = \phi$.

有了以上的准备, 现在可以具体求 $o_1(\theta^{\sharp}, V_0)$(其中 $\sharp \in \{1, 2, 3\}$) 的障碍公式了. 现考虑上同调群 $\mathbb{H}^l(X, \mathcal{B}^{\bullet}_{p,q;X_0/B_0})$ 中的一个等价类 $[\theta^{\sharp}]$ 总是可以将 $\theta^{\sharp}$ 延拓为 $L^{l-1}_{p,q;\mathcal{X}/B}$ 中的一个截面 $\theta^{\sharp}_t$. 根据前面分析, 需要求 $\delta^*(\theta^{\sharp})$. 所以要求 $\phi' \circ \delta^*_{\infty}(\theta^{\sharp})$. 根据定义 $\delta^*_{\infty}(\theta^{\sharp}) = d^{(l-1)}_{\mathcal{X}/B}(\theta^{\sharp}_t)$. 即, 要求 $\phi'(d^{(l-1)}_{\mathcal{X}/B}(\theta^{\sharp}_t))$. 令 $\Omega^{\sharp}_t$ 为 $\mathcal{L}^{l-1}_{p,q;\mathcal{X}}$ 一个整体截面, 满足, $\varphi(\Omega^{\sharp}_t)$ 为 $\theta^{\sharp}_t$(其中 φ 为 $\mathcal{X}$ 上微分形式层到相对微分形式层自然的商映射). 根据 $d^{(l-1)}_{\mathcal{X}/B}$ 算子的定义, 有 $\varphi(d^{(l-1)}_{\mathcal{X}}\Omega^{\sharp}_t)$ 为 $d^{(l-1)}_{\mathcal{X}/B}(\theta^{\sharp}_t)$. 以下记 V 在 $T\mathcal{X}$ 上的投影为 V_1, 在 $\bar{T}\mathcal{X}$ 上的投影为 V_2, 因为对于任意的 (p, q) 形式 $\Omega^{p,q}$, 有

$$\overline{\partial}_{\mathcal{X}}(\mathrm{int}(V_1)(\Omega^{p,q})) = -\mathrm{int}(V_1)(\overline{\partial}_{\mathcal{X}}\Omega^{p,q}) + \mathrm{int}(\overline{\partial}_{\mathcal{X}}V_1)(\Omega^{p,q});$$

$$\partial_{\mathcal{X}}(\mathrm{int}(V_2)(\Omega^{p,q})) = -\mathrm{int}(V_2)(\partial_{\mathcal{X}}\Omega^{p,q}) + \mathrm{int}(\partial_{\mathcal{X}}V_2)(\Omega^{p,q}).$$

则由映射 ϕ' 的定义, 得到:

1. 当 $\sharp = 1$ 时, $l = p + q$, $d^{(l-1)}_{\mathcal{X}} = d_{\mathcal{X}}$

$$\begin{aligned}\phi' \circ \delta^*_{\infty}(\theta^1)(V_0) &= \varphi(L_V(d_{\mathcal{X}}\Omega^1_t))|_X \\ &= \varphi(\mathrm{int}(V)d_{\mathcal{X}}(d_{\mathcal{X}}\Omega^1_t))|_X + \varphi(d_{\mathcal{X}}(\mathrm{int}(V)(d_{\mathcal{X}}\Omega^1_t)))|_X \\ &= \varphi(d_{\mathcal{X}}(\mathrm{int}(V_1 + V_2)(\partial_{\mathcal{X}} + \bar{\partial}_{\mathcal{X}})\Omega^1_t))|_X \\ &= \varphi(d_{\mathcal{X}}(\mathrm{int}(V_1)(\bar{\partial}_{\mathcal{X}}\Omega^1_t)))|_X + \varphi(d_{\mathcal{X}}(\mathrm{int}(V_2)(\partial_{\mathcal{X}}\Omega^1_t)))|_X \\ &\quad +\varphi(d_{\mathcal{X}}(\mathrm{int}(V_1)(\partial_{\mathcal{X}}\Omega^1_t) + \mathrm{int}(V_2)(\bar{\partial}_{\mathcal{X}}\Omega^1_t)))|_X \\ &= \varphi(\partial_{\mathcal{X}}(\mathrm{int}(\bar{\partial}_{\mathcal{X}}V_1)\Omega^1_t))|_X + \varphi(\bar{\partial}_{\mathcal{X}}(\mathrm{int}(\partial_{\mathcal{X}}V_2)\Omega^1_t))|_X \\ &\quad +\varphi(d_{\mathcal{X}}(\partial_{\mathcal{X}}(\mathrm{int}(V_1)\Omega^1_t)))|_X + \varphi(d_{\mathcal{X}}(\bar{\partial}_{\mathcal{X}}(\mathrm{int}(V_2)\Omega^1_t)))|_X \\ &\quad +\varphi(d_{\mathcal{X}}(\mathrm{int}(V_1)(\partial_{\mathcal{X}}\Omega^1_t) + \mathrm{int}(V_2)(\bar{\partial}_{\mathcal{X}}\Omega^1_t)))|_X.\end{aligned}$$

因为 $\varphi(d_{\mathcal{X}}(\partial_{\mathcal{X}}(\mathrm{int}(V_1)\Omega^1_t)))|_X$, $\varphi(d_{\mathcal{X}}(\bar{\partial}_{\mathcal{X}}(\mathrm{int}(V_2)\Omega^1_t)))|_X$ 和 $\varphi(d_{\mathcal{X}}(\mathrm{int}(V_1)(\partial_{\mathcal{X}}\Omega^1_t) + \mathrm{int}(V_2)(\bar{\partial}_{\mathcal{X}}\Omega^1_t)))|_X$ 都是 $d^{(l-1)}_X = d_X$ 的恰当形式. 所以有

$$\phi' \circ \delta^*_{\infty}(\theta^1)(V_0) \equiv \varphi(\partial_{\mathcal{X}}(\mathrm{int}(\bar{\partial}_{\mathcal{X}}V_1)\Omega^1_t))|_X + \varphi(\bar{\partial}_{\mathcal{X}}(\mathrm{int}(\partial_{\mathcal{X}}V_2)\Omega^1_t))|_X.$$

注意到 Kodaira-Spencer 映射 $\rho(V_0) = \overline{\partial}_{\mathcal{X}}V_1|_X$, $\bar{\rho}(V_0) = \partial_{\mathcal{X}}V_2|_X$, 所以

$$\phi' \circ \delta^*_{\infty}(\theta^1)(V_0) \equiv \partial_X(\mathrm{int}(\rho(V_0))(\theta^1)) + \bar{\partial}_X(\mathrm{int}(\bar{\rho}(V_0))(\theta^1)).$$

2. 当 $\sharp=2$ 时, $l=p+q-1$, $d_{\mathcal{X}}^{(l-1)}=\partial_{\mathcal{X}}\bar{\partial}_{\mathcal{X}}$

$$\begin{aligned}
\phi'\circ\delta_\infty^*(\theta^2)(V_0) &= \varphi(L_V(\partial_{\mathcal{X}}\bar{\partial}_{\mathcal{X}}\Omega_t^2))|_X\\
&= \varphi(\mathrm{int}(V)d_{\mathcal{X}}(\partial_{\mathcal{X}}\bar{\partial}_{\mathcal{X}}\Omega_t^2))|_X+\varphi(d_{\mathcal{X}}(\mathrm{int}(V)(\partial_{\mathcal{X}}\bar{\partial}_{\mathcal{X}}\Omega_t^2)))|_X\\
&= \varphi(d_{\mathcal{X}}(\mathrm{int}(V_1+V_2)(\partial_{\mathcal{X}}\bar{\partial}_{\mathcal{X}}\Omega_t^2)|_X\\
&= -\varphi(\partial_{\mathcal{X}}(\mathrm{int}(\bar{\partial}_{\mathcal{X}}V_1)\partial_{\mathcal{X}}\Omega_t^2)))|_X+\varphi(\bar{\partial}_{\mathcal{X}}(\mathrm{int}(\partial_{\mathcal{X}}V_2)\bar{\partial}_{\mathcal{X}}\Omega_t^2)))|_X\\
&\quad+\varphi(\partial_{\mathcal{X}}\bar{\partial}_{\mathcal{X}}(\mathrm{int}(V_1)(\partial_{\mathcal{X}}\Omega_t^2)))|_X+\varphi(\partial_{\mathcal{X}}\bar{\partial}_{\mathcal{X}}(\mathrm{int}(V_2)(\bar{\partial}_{\mathcal{X}}\Omega_t^2)))|_X
\end{aligned}$$

因为 $\varphi(\partial_{\mathcal{X}}\bar{\partial}_{\mathcal{X}}(\mathrm{int}(V_1)(\partial_{\mathcal{X}}\Omega_t^2)))|_X$ 和 $\varphi(\partial_{\mathcal{X}}\bar{\partial}_{\mathcal{X}}(\mathrm{int}(V_2)(\bar{\partial}_{\mathcal{X}}\Omega_t^2)))|_X$ 都是 $d_X^{(l-1)}=\partial_X\bar{\partial}_X$ 的恰当形式. 所以有

$$\phi'\circ\delta_\infty^*(\theta^2)(V_0)\quad\equiv\quad\varphi(\partial_{\mathcal{X}}(\mathrm{int}(\bar{\partial}_{\mathcal{X}}V_1)(\partial_{\mathcal{X}}\Omega_t^2)))|_X+\varphi(\bar{\partial}_{\mathcal{X}}(\mathrm{int}(\partial_{\mathcal{X}}V_2)(\bar{\partial}_{\mathcal{X}}\Omega_t^2)))|_X.$$

注意到Kodaira-Spencer映射 $\rho(V_0)=\overline{\partial}_{\mathcal{X}}V_1|_X$, $\bar{\rho}(V_0)=\partial_{\mathcal{X}}V_2|_X$, 所以

$$\phi^{'}\circ\delta_\infty^*(\theta^2)(V_0)\quad\equiv\quad\partial_X(\mathrm{int}(\rho(V_0))(\partial_X\theta^2))+\bar{\partial}_X(\mathrm{int}(\bar{\rho}(V_0))(\bar{\partial}_X\theta^2)).$$

3. 当 $\sharp=3$ 时, $l=p+q-2$, $d_{\mathcal{X}}^{(l-1)}=pr_{\mathcal{L}^l_{p,q;\mathcal{X}}}\circ d_{\mathcal{X}}$

$$\begin{aligned}
\phi'\circ\delta_\infty^*(\theta^3)(V_0) &= \varphi(L_V(pr_{\mathcal{L}^l_{p,q;\mathcal{X}}}\circ d_{\mathcal{X}}\Omega_t^3))|_X\\
&= \varphi(\mathrm{int}(V)d_{\mathcal{X}}(pr_{\mathcal{L}^l_{p,q;\mathcal{X}}}\circ d_{\mathcal{X}}\Omega_t^3)))|_X+\varphi(d_{\mathcal{X}}(\mathrm{int}(V)(pr_{\mathcal{L}^l_{p,q;\mathcal{X}}}\circ d_{\mathcal{X}}\Omega_t^3)))|_X\\
&= \varphi(\bar{\partial}_{\mathcal{X}}(\mathrm{int}(V_2)(pr_{\mathcal{L}^l_{p,q;\mathcal{X}}}\circ d_{\mathcal{X}}\Omega_t^3)))|_X+\varphi(\partial_{\mathcal{X}}(\mathrm{int}(V_1)(pr_{\mathcal{L}^l_{p,q;\mathcal{X}}}\circ d_{\mathcal{X}}\Omega_t^3)))|_X\\
&\quad+\varphi(\bar{\partial}_{\mathcal{X}}(\mathrm{int}(V_1)(pr_{\mathcal{L}^l_{p,q;\mathcal{X}}}\circ d_{\mathcal{X}}\Omega_t^3)))|_X+\varphi(\partial_{\mathcal{X}}(\mathrm{int}(V_2)(pr_{\mathcal{L}^l_{p,q;\mathcal{X}}}\circ d_{\mathcal{X}}\Omega_t^3)))|_X\\
&\quad+\varphi(\mathrm{int}(V_2)(\partial_{\mathcal{X}}(pr_{\mathcal{L}^l_{p,q;\mathcal{X}}}\circ d_{\mathcal{X}}\Omega_t^3)))|_X+\varphi(\mathrm{int}(V_1)(\partial_{\mathcal{X}}(pr_{\mathcal{L}^l_{p,q;\mathcal{X}}}\circ d_{\mathcal{X}}\Omega_t^3)))|_X\\
&\quad+\varphi(\mathrm{int}(V_2)(\bar{\partial}_{\mathcal{X}}(pr_{\mathcal{L}^l_{p,q;\mathcal{X}}}\circ d_{\mathcal{X}}\Omega_t^3)))|_X+\varphi(\mathrm{int}(V_1)(\bar{\partial}_{\mathcal{X}}(pr_{\mathcal{L}^l_{p,q;\mathcal{X}}}\circ d_{\mathcal{X}}\Omega_t^3)))|_X\\
&= \varphi(\bar{\partial}_{\mathcal{X}}(\mathrm{int}(V_2)(pr_{\mathcal{L}^l_{p,q;\mathcal{X}}}\circ d_{\mathcal{X}}\Omega_t^3)))|_X+\varphi(\partial_{\mathcal{X}}(\mathrm{int}(V_1)(pr_{\mathcal{L}^l_{p,q;\mathcal{X}}}\circ d_{\mathcal{X}}\Omega_t^3)))|_X\\
&\quad+\varphi(\mathrm{int}(\partial_{\mathcal{X}}V_2)(pr_{\mathcal{L}^l_{p,q;\mathcal{X}}}\circ d_{\mathcal{X}}\Omega_t^3))|_X+\varphi(\mathrm{int}(V_1)(\partial_{\mathcal{X}}(pr_{\mathcal{L}^l_{p,q;\mathcal{X}}}\circ d_{\mathcal{X}}\Omega_t^3)))|_X\\
&\quad+\varphi(\mathrm{int}(V_2)(\bar{\partial}_{\mathcal{X}}(pr_{\mathcal{L}^l_{p,q;\mathcal{X}}}\circ d_{\mathcal{X}}\Omega_t^3)))|_X+\varphi(\mathrm{int}(\bar{\partial}_{\mathcal{X}}V_1)(pr_{\mathcal{L}^l_{p,q;\mathcal{X}}}\circ d_{\mathcal{X}}\Omega_t^3))|_X\\
&= \varphi(\bar{\partial}_{\mathcal{X}}(\mathrm{int}(V_2)(pr_{\mathcal{L}^l_{p,q;\mathcal{X}}}\circ d_{\mathcal{X}}\Omega_t^3)))|_X+\varphi(\partial_{\mathcal{X}}(\mathrm{int}(V_1)(pr_{\mathcal{L}^l_{p,q;\mathcal{X}}}\circ d_{\mathcal{X}}\Omega_t^3)))|_X\\
&\quad+\varphi(\mathrm{int}(\partial_{\mathcal{X}}V_2)(pr_{\mathcal{L}^l_{p,q;\mathcal{X}}}\circ d_{\mathcal{X}}\Omega_t^3))|_X+\varphi(\mathrm{int}(\bar{\partial}_{\mathcal{X}}V_1)(pr_{\mathcal{L}^l_{p,q;\mathcal{X}}}\circ d_{\mathcal{X}}\Omega_t^3))|_X\\
&\quad+\varphi(\mathrm{int}(V_2)(-\partial_{\mathcal{X}}((1-pr_{\mathcal{L}^l_{p,q;\mathcal{X}}})\circ\bar{\partial}_{\mathcal{X}}\Omega_t^3)))|_X+\varphi(\mathrm{int}(V_1)(-\bar{\partial}_{\mathcal{X}}((1-pr_{\mathcal{L}^l_{p,q;\mathcal{X}}})\\
&\quad\circ\partial_{\mathcal{X}}\Omega_t^3)))|_X\\
&= \varphi(\bar{\partial}_{\mathcal{X}}(\mathrm{int}(V_2)(pr_{\mathcal{L}^l_{p,q;\mathcal{X}}}\circ d_{\mathcal{X}}\Omega_t^3)))|_X+\varphi(\partial_{\mathcal{X}}(\mathrm{int}(V_1)(pr_{\mathcal{L}^l_{p,q;\mathcal{X}}}\circ d_{\mathcal{X}}\Omega_t^3)))|_X\\
&\quad+\varphi(\mathrm{int}(\partial_{\mathcal{X}}V_2)(pr_{\mathcal{L}^l_{p,q;\mathcal{X}}}\circ d_{\mathcal{X}}\Omega_t^3))|_X+\varphi(\mathrm{int}(\bar{\partial}_{\mathcal{X}}V_1)(pr_{\mathcal{L}^l_{p,q;\mathcal{X}}}\circ d_{\mathcal{X}}\Omega_t^3))|_X\\
&\quad+\varphi(\partial_{\mathcal{X}}(\mathrm{int}(V_2)(((1-pr_{\mathcal{L}^l_{p,q;\mathcal{X}}})\circ\bar{\partial}_{\mathcal{X}}\Omega_t^3)))|_X-\varphi(\mathrm{int}(\partial_{\mathcal{X}}V_2)(((1-pr_{\mathcal{L}^l_{p,q;\mathcal{X}}})\\
&\quad\circ\bar{\partial}_{\mathcal{X}}\Omega_t^3)))|_X\\
&\quad+\varphi(\bar{\partial}_{\mathcal{X}}(\mathrm{int}(V_1)((1-pr_{\mathcal{L}^l_{p,q;\mathcal{X}}})\circ\partial_{\mathcal{X}}\Omega_t^3)))|_X-\varphi(\mathrm{int}(\bar{\partial}_{\mathcal{X}}V_1)((1-pr_{\mathcal{L}^l_{p,q;\mathcal{X}}})\\
&\quad\circ\partial_{\mathcal{X}}\Omega_t^3)))|_X
\end{aligned}$$

因为 $\varphi(\bar{\partial}_{\mathcal{X}}(\mathrm{int}(V_2)(pr_{\mathcal{L}^l_{p,q;\mathcal{X}}}\circ d_{\mathcal{X}}\Omega_t^3)))|_X$, $\varphi(\partial_{\mathcal{X}}(\mathrm{int}(V_1)(pr_{\mathcal{L}^l_{p,q;\mathcal{X}}}\circ d_{\mathcal{X}}\Omega_t^3)))|_X$, $\varphi(\partial_{\mathcal{X}}(\mathrm{int}(V_2)((1-pr_{\mathcal{L}^l_{p,q;\mathcal{X}}})\circ\bar{\partial}_{\mathcal{X}}\Omega_t^3)))|_X$ 和 $\varphi(\bar{\partial}_{\mathcal{X}}(\mathrm{int}(V_1)((1-pr_{\mathcal{L}^l_{p,q;\mathcal{X}}})\circ\partial_{\mathcal{X}}\Omega_t^3)))|_X$ 都是 $d_X^{(l-1)}=pr_{\mathcal{L}^l_{p,q;\mathcal{X}}}\circ d_X$ 的恰当形式. 所以有

$$\begin{aligned}\phi'\circ\delta^*_\infty(\theta^3)(V_0)\equiv&-\varphi(\mathrm{int}(\partial_{\mathcal{X}}V_2)(((1-pr_{\mathcal{L}^l_{p,q;\mathcal{X}}})\circ\bar{\partial}_{\mathcal{X}}\Omega_t^3)))|_X-\varphi(\mathrm{int}(\bar{\partial}_{\mathcal{X}}V_1)((1-pr_{\mathcal{L}^l_{p,q;\mathcal{X}}})\\&\circ\partial_{\mathcal{X}}\Omega_t^3)))|_X.\end{aligned}$$

注意到 Kodaira-Spencer 映射 $\rho(V_0)=\overline{\partial}_{\mathcal{X}}V_1|_X$, $\bar{\rho}(V_0)=\partial_{\mathcal{X}}V_2|_X$, 所以

$$\phi'\circ\delta^*_\infty(\theta^3)(V_0)\quad\equiv\quad(\mathrm{int}(\rho(V_0))(\partial_X\theta^{3;p-1,q-2}))+(\mathrm{int}(\bar{\rho}(V_0))(\bar{\partial}_X\theta^{3;p-2,q-1})).$$

综上所述, 得到了所有障碍公式的证明.

[参 考 文 献]

[1] SCHWEITZER M. Autour de la cohomologie de Bott-Chern [J/OL]. arXiv:0709 3528v1, 2007[2014-03-06].http://arxiv.org/abs/0709.3528.

[2] LIN J Z, YE X M. The jumping phenomenon of the dimensions of Bott-Chern cohomology groups and Aeppli cohomology groups [J/OL]. arXiv: 1403 0285v2, 2014[2014-03-06].http://arxiv.org/abs/1403.0285.

[3] KODAIRA K. Complex manifolds and deformation of complex structures [M]. New York: Springer, 1986.

[4] VOISIN C. Hodge theory and complex algebraic geometry I [M]. London: Cambridge University Press, 2002.

[5] ANGELLA D. The cohomologies of the Iwasawa manifold and of its small deformations [J]. J Geom Anal, 2013, 23(3): 1355-1378.

[6] YE X M. The jumping phenomenon of Hodge numbers [J]. Pacific Journal of Mathematics, 2008, 235(2): 379-398.

[7] YE X M. The jumping phenomenon of the dimensions of cohomology groups of tangent sheaf [J]. Acta Mathematica Scientia, 2010, 30(5): 1746-1758.

[8] VOISIN C. Symétrie miroir [M]. Paris: Société Mathématique de France, 1996.

[9] FRÖLICHER A. Relations between the cohomology groups of Dolbeault and topological invariants [J], Proc Nat Acad Sci USA, 1955: 641-644.

[10] BOTT R, CHERN S -S. Hermitian vector bundles and the equidistribution of the zeroes of their holomorphic sections [J], Acta Math, 1965: 71-112.

[11] AEPPLI A. On the cohomology structure of Stein manifolds [J], Proc Conf Complex Analysis (Minneapolis, Minn., 1964), 1965: 58-70.

(责任编辑 李 艺)