文章编号: 1000-5641(2015)01-0131-05

上可嵌入图与次上可嵌入图的线性荫度

吕长青

(枣庄学院 数学与统计学院, 山东 枣庄 277160)

摘要: 通过度再分配的方法研究上可嵌入图与次上可嵌入图的线性荫度, 证明了最大度 Δ 不小于 $3\sqrt{4-3\varepsilon}$ 且欧拉示性数 $\varepsilon\leqslant 0$ 的上可嵌入图其线性荫度为 $\lceil\frac{\Delta}{2}\rceil$.对于次上可嵌入图, 如果最大度 $\Delta\geqslant 3\sqrt{4-3\varepsilon}$ 且 $\varepsilon\leqslant 0$, 则其线性荫度为 $\lceil\frac{\Delta}{2}\rceil$. 改进了文献 [1] 中最大度的的界. 作为应用证明了双环面上的三角剖分图的线性荫度.

关键词: 线性荫度; 曲面; (次)上可嵌入图; 欧拉示性数

中图分类号: O157.5 **文献标识码**: A

DOI: 10.3969/j.issn.1000-5641.2015.01.016

The linear arboricity of upper-embedded graph and secondary upper-embedded graph

LYU Chang-qing

(*School of Mathematics and Statistics, Zaozhuang University, Zaozhuang Shandong, 277160, China*)

Abstract: The linear arboricity of a graph G is the minimum number of linear forests which partition the edges of G. In the present, it is proved that if a upper-embedded graph G has $\Delta\geqslant 3\sqrt{4-3\varepsilon}$ then its linear arboricity is $\lceil\frac{\Delta}{2}\rceil$ and if a secondary upper-embedded graph G has $\Delta\geqslant 6\sqrt{1-\varepsilon}$ then its linear arboricity is $\lceil\frac{\Delta}{2}\rceil$, where $\varepsilon\leqslant 0$. It improves the bound of the conclusion in [1]. As its application, the linear arboricity of a triangulation graph on double torus is concluded.

Key words: linear arboricity; surface; (secondary) upper-embedded graph; Euler characteristic

0 引 言

本文研究的图都是简单连通无向图, 所有的专业术语均可参考文献[2].

设图 $G=(V,E)$, 令 $N(v)=\{u\,|\,uv\in E(G)\}$, $N_k(v)=\{u\,|\,u\in N(v),d(u)=k\}$, 这里 $d(v)=|N(v)|$ 是点 v 度. 记 $\Delta(G)$ 和 $\delta(G)$ 分别表示图的最大度与最小度, 如果一个点的度为 k 称该点为 $k-$点.

收稿日期: 2014-04

基金项目: 国家自然科学基金(11101357, 61075033)

作者简介: 吕长青, 男, 副教授, 研究方向为图论、运筹学. E-mail: cqiqc1999@126.com.

曲面是一个紧的连通的2-维闭流形. 曲面可分为可定向曲面与不可定向曲面. 一个可定向曲面$S_h(h\geqslant 0)$是由一个球面添上h个环柄得到. 不可定向曲面$N_k(k\geqslant 1)$是由一个球面挖掉k个圆盘而分别补上Möbius带得到. 如不加特别说明本文讨论的曲面都是可定向曲面.

如果一个图画在曲面Σ上使得它的边仅仅在端点处相交, 则称这个图嵌入到曲面Σ上. 图G嵌入曲面Σ上称为2-胞腔嵌入, 如果$\Sigma-G$中每个分支同胚于一个开圆盘. 此时, 每个分支称为G在曲面Σ上嵌入的一个面. 一个嵌入图的面度是指与这个面相关联的边的个数, 如果一个面f的度为k, 则称f为$k-$面; 如果一个面f的度大于等于k, 则称f为k^+-面.

一个曲面Σ的Euler示性数$\varepsilon(\Sigma)$ (文献[3])定义如下: 当$\Sigma=S_h$时, $\varepsilon(\Sigma)=2-2h$; 当$\Sigma=N_k$时, $\varepsilon(S)=2-k$.

Euler公式[3] 设G是一个2-胞腔嵌入在曲面Σ上的图, 如果G有$V(G)$个顶点, $E(G)$条边, 在曲面S上有$F(G)$个面, 则$|V(G)|-|E(G)|+|F(G)|=\varepsilon$.

图的最大亏格是指存在一个最大的整数k使得G能嵌入到S_k上, 记作$\gamma_M(G)$. 由于连通图的二胞腔嵌入至少有一个面, 由欧拉公式可得: $\gamma_M(G)\leqslant[\frac{\beta(G)}{2}]$, 这里$\beta(G)(=|E(G)|-|V(G)|+1)$ 称为图 G 的Betti 数(或圈秩). 一个连通图G是上可嵌入的如果$\gamma_M(G)=[\frac{\beta(G)}{2}]$; 称一个图$G$是次上可嵌入的如果$\gamma_M(G)=[\frac{\beta(G)}{2}]-1$. 由于不连通图不能二胞腔嵌入到任何曲面上, 所以本文讨论的都是连通图.

称一个映射φ:$\to\{1,2,\cdots,t\}$为图G的一个$t-$线性染色, 如果对于任意的$1\leqslant\alpha\leqslant t$时$(V(G),\varphi^{-1}(\alpha))$的边导出子图是一个线森; 一个图的线性荫度是其所有$t-$线性染色中最小的数t, 记作$la(G)$. Akiyama、Exoo和Harary在文献[4]给出了对任意的正则图G, 其线性荫度满足$la(G)=\lceil(\Delta(G)+1)/2\rceil$. 由于对任意的图$G$, $la(G)\geqslant\lceil\Delta(G)/2\rceil$, 由此可得到著名的线性荫度猜想.

猜想 1[4] 对任意的图G, $\lceil\frac{\Delta(G)}{2}\rceil\leqslant la(G)\leqslant\lceil\frac{\Delta(G)+1}{2}\rceil$.

对于一些图类猜想1被证明是正确的, 如完全二部图, Halin图, 系列平行图, 完全正则多部图等(文献[4-7]); 对于平面图, 猜想1是成立的(文献[9]). Wu在文献[10]中证明了平面图G, 如果$\Delta\geqslant 13$,则$la(G)=\lceil\Delta/2\rceil$, 并将这个结果推广到欧拉示性数$\varepsilon\geqslant 0$的曲面嵌入图; 文献[8]又给出了当欧拉示性数$\varepsilon\leqslant 0$, 且最大度$\Delta(G)$不小于$\sqrt{46-54\varepsilon}+19$时, $la(G)=\lceil\Delta/2\rceil$. 论文[1]证明了当欧拉示性数$\varepsilon\leqslant 0$, 当$\Delta(G)\geqslant\sqrt{45-45\varepsilon}+10$时, $la(G)=\lceil\Delta/2\rceil$, 改进了文献[8]中最大度的下界.

本文讨论了上可嵌入图以及次上可嵌入图的线性荫度,证明了下面定理并进一步改进了文献[8]最大度的下界. 图1所示是欧拉示性数$-6\leqslant\varepsilon\leqslant-1$曲面嵌入图$G$结果.

ε		-1	-2	-3	-4	-5	-6
$H(\varepsilon)$	$H(\varepsilon)=\lfloor\frac{7+\sqrt{49-24\varepsilon)}}{2}\rfloor$	6	7	7	8	9	11
文献[8]结果	$\Delta(G)\geqslant\sqrt{46-54\varepsilon}+19$	29	32	34	36	37	39
定理1的结果	$\Delta(G)\geqslant 3\sqrt{4-3\varepsilon}$	8	10	11	12	14	15
定理2的结果	$\Delta(G)\geqslant 6\sqrt{1-\varepsilon}$	9	11	12	14	15	16

图 1 欧拉示性数 $-6\leqslant\varepsilon\leqslant-1$ 曲面嵌入图 G 结果

Fig. 1 Result on embedded graph G on a surface of Euler characteristic $-6\leqslant\varepsilon\leqslant-1$

定理 1 设图G是上可嵌入图且$\varepsilon\leqslant 0$, 且最大度$\Delta(G)\geqslant 3\sqrt{4-3\varepsilon}$时, $la(G)=\lceil\frac{\Delta(G)}{2}\rceil$.

定理 2 设图G是次上可嵌入图且$\varepsilon\leqslant 0$,且最大度$\Delta(G)\geqslant 6\sqrt{1-\varepsilon}$时, $la(G)=\lceil\frac{\Delta(G)}{2}\rceil$.

一个图G称为稀疏图如果$|E(G)|=O(|V(G)|)$. 对于给定的欧拉示性数ε且满足定理1或定理2最大度下界时, 该图为稀疏图, 因此本文讨论的图类为稀疏图.

1　引　　理

引理 1.1　设图G是上可嵌入图且$\varepsilon\leqslant 0$, 且最大度$\Delta(G)\geqslant 3\sqrt{4-3\varepsilon}$时, 则$\sum_{f\in F}(d(f)-6)\geqslant 0$.

证明: 由于G是上可嵌入图, 所以G为单面或双面嵌入图. 由欧拉公式可知$|E(G)|=|V(G)|+|F(G)|-\varepsilon$, 由于$\Delta(G)\geqslant 3\sqrt{4-3\varepsilon}>7$, 所以$|E(G)|=|V(G)|+|F(G)|-\varepsilon>8+1+1$, 即$|E(G)|>10$, 又由于$\sum_{f\in F}(d(f)-6)=2|E(G)|-6|F(G)|\geqslant 0$.

引理 1.2　设图G是次上可嵌入图且$\varepsilon\leqslant 0$, 且最大度$\Delta(G)\geqslant 6\sqrt{1-\varepsilon}$时, 则$\sum_{f\in F}(d(f)-6)\geqslant 0$.

证　明　由于G是次上可嵌入图, 所以G 为3或4面嵌入图. 由欧拉公式可知$|E(G)|=|V(G)|+|F(G)|-\varepsilon$, 以及$\Delta(G)\geqslant 6\sqrt{1-\varepsilon}>8$, 所以$|E(G)|=|V(G)|+|F(G)|-\varepsilon>9+3+1$, 即$|E(G)|>13$, 又由于$\sum_{f\in F}(d(f)-6)=2E(G)-6F(G)\geqslant 0$.

假设G是使定理1或定理2中的结论不成立的最小反例, 则有如下引理成立(文献[8]).

引理 1.3[8]　对于任意的边$uv\in E(G)$, 则$d_G(u)+d_G(v)\geqslant\Delta(G)+2$.

由引理1.1, 可知$\delta(G)\geqslant 2$且任意两个2-点不相邻.

引理 1.4[8]　G不含偶圈$v_0v_1\cdots v_{2n-1}v_0$使得$d(v_1)=d(v_3)=\cdots=d(v_{2n-1})=2$且$\max\limits_{0\leqslant i<n}|N_2(v_{2i})|\geqslant 3$.

设G_2是由2-点相关联边的导出子图, M是G中饱和G_2的2-点的匹配. 如果$uv\in M$且$d(u)=2$, 那么称v为u的一个2-master. 显然每个2-点都有一个2-master, 它必然是最大度点,每一个最大度点至多是一个2-点的2-master.

对于整数$t\,(3\leqslant t\leqslant\lfloor\frac{\Delta(G)}{2}\rfloor)$, 令$X_t\subseteq\{v|\,2\leqslant d_G(v)\leqslant t\}$以及$Y_t=N(X_t)$. 由引理1.3知道$X_t$是图$G$边独立集. 令$K$是以$X_t$与$Y_t$作为它的分部的图$G$的导出二部子图. 那么对于$u\in X_t$有$d_K(u)=d_G(u)$. 对于任意的$v\in Y_t$如果$d_K(v)\geqslant d_G(v)+2(t-\lceil\frac{\Delta(G)}{2}\rceil)$那么称$K$是一个$t$-alternating.

引理 1.5[8]　如果$3\leqslant t\leqslant\lceil\frac{\Delta(G)}{2}\rceil)$, 则图$G$不含$t$-alternating.

引理 1.6[8]　如果$X_t\neq\emptyset$, 那么存在K_t的二部子图M_t使得对于每一个$x\in X_t$时$d_{M_t}(x)=1$, 且对任意的$y\in Y_t$, $0\leqslant d_{M_t}(y)\leqslant 2t-1$.

在图G中, 如果$xy\in M_t$, 则称y是x的t-master. 由引理1.4可得对于任意的i和j $(2\leqslant i\leqslant j\leqslant 3)$, 则每一个$i$-点都有$j$-master.

2　定理及其证明

定理 1　设图G是上可嵌入图且$\varepsilon\leqslant 0$, 且最大度$\Delta(G)\geqslant 3\sqrt{4-3\varepsilon}$时, $la(G)=\lceil\frac{\Delta(G)}{2}\rceil$.

证　明　假设图G是使定理不成立的最小反例. 由欧拉公式$|V(G)|-|E(G)|+|F(G)|=\varepsilon$, 可得

$$\sum_{v\in V}(d(v)-3)+\frac{1}{2}\sum_{f\in F}(d(f)-6)=-3(|V(G)|-|E(G)|+|F(G)|)=-3\varepsilon>0.$$

由引理1.1可知, $\sum_{f\in F}(d(f)-6)\geqslant 0$. 所以$\sum_{v\in V}(d(v)-3)\leqslant -3\varepsilon$.

对于任意的$x\in V(G)$, 定义$ch(x)=d(x)-3$, 根据下面给出的规则, 对于每一个$x\in V(G)$, 重新分配新的值记作$ch'(x)$. 由于重新分配值不影响整个的和, 所以

$$\sum_{x\in V(G)}ch'(x)=\sum_{x\in V(G)}ch(x)\leqslant -3\varepsilon. \tag{1}$$

如果对每一个 $x\in V(G)$ 能够得到 $ch'(x)>-3\varepsilon$. 这就得到了矛盾. 下面给出度重新分配值的规则.

R1 每一个 2-点从它的 2-masters 接受值 1.

R2 如果 $3\leqslant d(v)\leqslant\Delta(G)-1$, 那么 v 点即不接受值也不分值.

断言 对任意的 $v\in V$, 则 $ch'(v)\geqslant 0$; 特别的如果 $d(v)\geqslant\lceil\frac{\Delta(G)}{3}\rceil$, 则 $ch'(v)\geqslant\lceil\frac{\Delta(G)}{3}\rceil-2$.

证　明 如果 $d(v)=2$, 那么 $ch'(v)\geqslant 0$, 这是因为 v 从它的 2-masters 接受值为 1; 如果 $d(v)=3$, 那么 $ch'(v)=0$; 如果 $4\leqslant d(v)\leqslant\Delta(G)-1$, 那么 v 既不接受也不分配值, 对于每一个 $u\in N(v)$ 由引理 1.3 可知 $d_G(u)\geqslant 3$, 所以 $ch'(v)=ch(v)=d(v)-3\geqslant 0$; 如果 $d(v)\geqslant\lceil\frac{\Delta(G)}{3}\rceil$ 则 $d(v)-3\geqslant\lceil\frac{\Delta(G)}{3}\rceil-4$.

如果 $d(v)=\Delta(G)$, 那么对于 $u\in N(v)$ 有 $d_G(u)\geqslant 2$, 这可以推出 v 是 1 个点的 2-master, 所以 $ch'(v)\geqslant\frac{2}{3}(\Delta(G)-3)-1)$.

由于 $\Delta(G)\geqslant 3\sqrt{4-3\varepsilon}$, 所以 $\Delta(G)-2\geqslant\lceil\frac{\Delta(G)}{3}\rceil$, 因此当 $d(v)\geqslant\lceil\frac{\Delta(G)}{3}\rceil$ 时 $ch'(v)\geqslant\lceil\frac{\Delta(G)}{3}\rceil-2$. 所以断言成立.

令 $U=\{u|\,d_G(u)\leqslant\lfloor\frac{\Delta(G)}{3}\rfloor\}$, $W=N(U)$. 由引理 1.3 可知 U 是 G 的独立集. 设 F 是 G 导出二部子图, U 和 W 是 F 的分部. 如果 $|V(G)\backslash U|\leqslant\lfloor\frac{\Delta(G)}{3}\rfloor+1$, 那么对于每个点 $w\in W$, $d_F(w)=d_G(w)-d_{G-U}(w)\geqslant d_G(w)-\lfloor\frac{\Delta(G)}{3}\rfloor\geqslant d_G(w)-2\lceil\frac{\Delta(G)}{2}\rceil+2\lceil\frac{\Delta(G)}{3}\rceil$, 也就是. F 是图 G 的 $(\lceil\frac{\Delta(G)}{3}\rceil)$-alternating,与引理 1.6 矛盾. 所以 $|V(G)\backslash U|\geqslant\lceil\frac{\Delta(G)}{3}\rceil+2$. 这样可得

$\sum_{v\in V(G)}ch(v)=\sum_{v\in V(G)}ch'(v)\geqslant(\lceil\frac{\Delta(G)}{3}\rceil+2)(\lceil\frac{\Delta(G)}{3}\rceil-2)\geqslant(\lceil\frac{3\sqrt{4-3\varepsilon}}{3}\rceil+2)(\lceil\frac{3\sqrt{4-3\varepsilon}}{3}\rceil-2)>-3\varepsilon$, 矛盾. 这样就完成了定理 1 的证明.

定理 2 设图 G 是次上可嵌入图且 $\varepsilon\leqslant 0$, 且最大度 $\Delta(G)\geqslant 6\sqrt{1-\varepsilon}$ 时, $la(G)=\lceil\frac{\Delta(G)}{2}\rceil$.

证　明 假设图 G 是使定理不成立的最小反例. 由欧拉公式 $|V(G)|-|E(G)|+|F(G)|=\varepsilon$, 可得

$$\sum_{v\in V}(d(v)-3)+\frac{1}{2}\sum_{f\in F}(d(f)-6)=-3(|V(G)|-|E(G)|+|F(G)|)=-3\varepsilon>0.$$

由引理 1.2 可知, $\sum_{f\in F}(d(f)-6)\geqslant 0$. 所以 $\sum_{v\in V}(d(v)-3)\leqslant-3\varepsilon$.

对于任意的 $x\in V(G)$, 定义 $ch(x)=d(x)-3$, 根据下面给出的规则, 对于每一个 $x\in V(G)$, 重新分配新的值记作 $ch'(x)$. 由于重新分配值不影响整个的和, 所以

$$\sum_{x\in V(G)}ch'(x)=\sum_{x\in V(G)}ch(x)\leqslant-3\varepsilon. \tag{2}$$

如果对每一个 $x\in V(G)$ 能够得到 $ch'(x)>-3\varepsilon$. 这就得到了矛盾. 下面给出度重新分配值的规则.

R1 每一个 2-点从它的 2-masters 接受值 1.

R2 如果 $3\leqslant d(v)\leqslant\Delta(G)-1$, 那么 v 点即不接受值也不分值.

类似于定理 1 的证明, 可得

对任意的 $v\in V$, 则 $ch'(v)\geqslant 0$; 特别的如果 $d(v)\geqslant\lceil\frac{\Delta(G)}{3}\rceil$, 则 $ch'(v)\geqslant\lceil\frac{\Delta(G)}{3}\rceil-2$.

令 $U=\{u|\,d_G(u)\leqslant\lfloor\frac{\Delta(G)}{3}\rfloor\}$, $W=N(U)$. 由引理 1.3 可知 U 是 G 的独立集. 设 F 是 G 导出二部子图, U 和 W 是 F 的分部. 如果 $|V(G)\backslash U|\leqslant\lfloor\frac{\Delta(G)}{3}\rfloor+1$, 那么对于每个点 $w\in W$, $d_F(w)=d_G(w)-d_{G-U}(w)\geqslant d_G(w)-\lfloor\frac{\Delta(G)}{3}\rfloor\geqslant d_G(w)-2\lceil\frac{\Delta(G)}{2}\rceil+2\lceil\frac{\Delta(G)}{3}\rceil$, 也就是, F 是图 G 的 $(\lceil\frac{\Delta(G)}{3}\rceil)$-alternating, 与引理 1.6 矛盾. 所以 $|V(G)\backslash U|\geqslant\lceil\frac{\Delta(G)}{3}\rceil+2$. 这样可得 $\sum_{v\in V(G)}ch(v)=\sum_{v\in V(G)}ch'(v)\geqslant(\lceil\frac{\Delta(G)}{3}\rceil+2)(\lceil\frac{\Delta(G)}{3}\rceil-2)\geqslant(\lceil\frac{6\sqrt{1-\varepsilon}}{3}\rceil+2)(\lceil\frac{6\sqrt{1-\varepsilon}}{3}\rceil-2)>-3\varepsilon$, 矛盾. 这样就完成了定理 2 的证明.

称可定向曲面 S_2 为双环面; 称图 G 三角剖分曲面 Σ 如果图 G 嵌入到曲面 Σ 上且每个面的面度为 3.

定理 3　设图 G 是双环面的三角剖分图, 且能上可嵌入到欧拉示性数为 $\varepsilon \leqslant -2$ 曲面上, 当最大度 $\Delta(G) \geqslant 3(\sqrt{1-\frac{2}{3}\varepsilon}+2)$ 时, $la(G)=\lceil\frac{\Delta(G)}{2}\rceil$.

证　明　假设图 G 是使定理不成立的最小反例. 由于图 G 嵌入到 S_2, 由欧拉公式 $|V(G)|-|E(G)|+|F(G)|=-2$, 可得

$$\sum_{v\in V}(d(v)-3)+\frac{1}{2}\sum_{f\in F}(d(f)-6)=-3(|V(G)|-|E(G)|+|F(G)|)=6>0.$$

由于 G 可三角剖分 S_2, 所以 $3|V(G)|=|E(G)|-6$. $\sum_{v\in V}(d(v)-3)=\sum_{v\in V}(d(v)-6)+3|V(G)|=3|V(G)|+12$, 所以 $\sum_{v\in V}(d(v)-3)=6+|E(G)|$. 由于 G 能上可嵌入到欧拉示性数为 $\varepsilon\leqslant -2$ 曲面上, 可得 $|E(G)|\leqslant -\frac{3}{2}\varepsilon$, 所以 $\sum_{v\in V}(d(v)-3)\leqslant 6-\frac{3}{2}\varepsilon$.

对于任意的 $x\in V(G)$), 定义 $ch(x)=d(x)-3$, 根据下面给出的规则, 对于每一个 $x\in V(G)$, 重新分配新的值记作 $ch'(x)$. 由于重新分配值不影响整个的和, 所以

$$\sum_{x\in V(G)}ch'(x)=\sum_{x\in V(G)}ch(x)\leqslant 6-\frac{3}{2}\varepsilon. \tag{3}$$

如果对每一个 $x\in V(G)$ 能够得到 $ch'(x)>6-\frac{3}{2}\varepsilon$. 这就得到了矛盾. 下面给出度重新分配值的规则.

R1　每一个 2-点从它的 2-masters 接受值 1.

R2　如果 $3\leqslant d(v)\leqslant \Delta(G)-1$, 那么 v 点即不接受值也不分值.

类似于定理 1 中的证明可得

对任意的 $v\in V$, 则 $ch'(v)\geqslant 0$; 特别的如果 $d(v)\geqslant\lceil\frac{\Delta(G)}{3}\rceil$, 则 $ch'(v)\geqslant\lceil\frac{\Delta(G)}{3}\rceil-2$.

令 $U=\{u|\,d_G(u)\leqslant\lfloor\frac{\Delta(G)}{3}\rfloor\}$, $W=N(U)$. 由引理 1.3 可知 U 是 G 的独立集. 设 F 是 G 导出二部子图, U 和 W 是 F 的分部. 如果 $|V(G)\backslash U|\leqslant\lfloor\frac{\Delta(G)}{3}\rfloor+1$, 那么对于每个点 $w\in W$, $d_F(w)=d_G(w)-d_{G-U}(w)\geqslant d_G(w)-\lfloor\frac{\Delta(G)}{3}\rfloor\geqslant d_G(w)-2\lceil\frac{\Delta(G)}{2}\rceil+2\lceil\frac{\Delta(G)}{3}\rceil$, 也就是, F 是图 G 的 $(\lceil\frac{\Delta(G)}{3}\rceil)$-alternating, 与引理 1.6 矛盾. 所以 $|V(G)\backslash U|\geqslant\lceil\frac{\Delta(G)}{3}\rceil+2$. 这样可得 $\sum_{v\in V(G)}ch(v)=\sum_{v\in V(G)}ch'(v)\geqslant(\lceil\frac{\Delta(G)}{3}\rceil+2)(\lceil\frac{\Delta(G)}{3}\rceil-2)\geqslant(\lceil\frac{3(\sqrt{1-\frac{2}{3}\varepsilon}+2)}{3}\rceil+2)(\lceil\frac{3(\sqrt{1-\frac{2}{3}\varepsilon}+2)}{3}\rceil-2)>6-\frac{3}{2}\varepsilon$, 矛盾. 这样就完成了定理 3 的证明.

[参　考　文　献]

[1] 吕长青. 较大亏格嵌入图的线性荫度[J]. 华东师范大学学报: 自然科学版, 2013, 1: 7-10.

[2] BONDY J A, MURTY U S R. Graph Theory with Applications [M]. New York: Macmilan Ltd Press, 1976.

[3] MOHAR B, THOMASSEN C. Graphs on Surfaces [M]. Baltimore: Johns Hopkins University Press, 2001: 85-85.

[4] AKIYAMA J, EXOO G, HARARY F. Covering and packing in graphs III: Cyclic and acyclic invariants [J]. Math Slovaca, 1980(30): 405-417.

[5] AÏ-DJAFER H. Linear arboricity for graphs with multiple edges [J]. Journal of Graph Theory, 1987(11):135-140.

[6] WU J L. Some path decompositions of Halin graphs [J]. Journal of Shandong Mining Institute, 1998(17): 92-96.

[7] WU J L. The linear arboricity of series-parallel graphs [J]. Graph and Combinatorics, 2000(16):367-372.

[8] WU J L. The Linear arboricity of graphs on surfaces of negative Euler characteristic [J]. SIAM J Discrete Math, 2008(23):54-58.

[9] WU J L, WU Y W. The linear arboricity of planar graphs of maximum degree seven is four [J]. Journal of Graph Theory, 2008(58): 210-220.

[10] WU J L. On the linear arboricity of planar graphs [J]. Journal of Graph Theory, 1999(31): 129-134.

[11] WU J L, LIU G Z, WU Y L. The linear arboricity of composition graphs [J]. Journal of System Science and Complexity, 2002(15):3 72-375.

[12] AHIYAMA J, EXOO G, HARARY F. Covering and packing in graphs IV: Linear arboricity [J]. Networks, 1981(11): 69-72.

(责任编辑　李　艺)