

文章编号: 1000-5641(2016)03-0076-08

SIM(2)引力规范理论

吴奕暉, 薛 迅

(华东师范大学 物理系, 上海 200241)

摘要: 基于宇宙微波背景辐射 (Cosmic Microwave Background Radiation, CMB) 的各向异性观测结果和马赫原理, 假设了洛伦兹 (Lorentz) 对称性从大于星系尺度开始破缺, 并基于这个动机以 SIM(2) 规范理论为例, 诠释了所谓的“暗物质效应”, 意即天文观测上对牛顿-爱因斯坦(Newton-Einstein)引力理论预言的偏离, 可以由小尺度上 Lorentz 对称性的破缺在大尺度上的累积呈展出来. 分析了 SIM(2) 规范理论, 在场运动方程之外得到了 8 个约束方程, 并且将独立 contorsion 分量个数也约化到了 8 个. 得到了 contorsion 是非平庸的, 并且即使在没有物质分布的区域也会贡献一个等效的能-动张量分布. 最后, 分析了在弱场近似下的度规柱对称解, 分析了此解的性质.

关键词: SIM(2)群; 洛伦兹破缺; 引力规范理论; contorsion

中图分类号: O41 **文献标识码:** A **DOI:** 10.3969/j.issn.1000-5641.2016.03.009

SIM(2) gravitational gauge theory

WU Yi-wei, XUE Xun

(Department of Physics, East China Normal University, Shanghai 200241, China)

Abstract: Based on the anisotropies of CMB (Cosmic Microwave Background Radiation, CMB) on the large scale and Mach's principle, this paper proposed that the Lorentz invariance is violated from the length scale of galaxy. SIM(2) gauge theory was taken as an example of such motivation to illustrate the so called dark matter effect, the deviation of astronomical observation from Newton-Einstein prediction, which can be emerged from the accumulated Lorentz violation effect on the short scale. SIM(2) gauge theory was analyzed and 8 additional constrain equations were obtained in addition to the equation of motion, while the independent components of contorsion were also reduced to 8. It can lead us to the conclusion that the contorsion is non-trivial and can contribute an effective energy-momentum distribution even in the region devoid of matter. Finally, the cylindrical symmetrized solution of metric under weak field expansion was given and its property was analyzed.

Key words: SIM(2) group; Lorentz breaking; gravitational gauge theory; contorsion

收稿日期: 2015-05

第一作者: 吴奕暉, 男, 硕士研究生, 研究方向为洛伦兹破缺、等效引力理论、与暗物质有关的超越标准模型理论. E-mail: longqi07@qq.com.

通信作者: 薛 迅, 男, 副教授, 硕士生导师, 研究方向为洛伦兹破缺、等效引力理论、与暗物质有关的超越标准模型理论. E-mail: xxue@phy.ecnu.edu.cn.

0 引言

广义相对论是当代物理学中最重要的理论之一. 随着量子场论, 特别是其中规范理论成功地统一了弱电理论, 加上大统一理论(Grand Unified Theory, GUT)的铺建, 人们逐渐开始思考是否可以将广义相对论, 也就是引力理论容纳到规范场论之中去. Utiyama 在 1955 年首先提出了将广义相对论看成是一种规范理论的思想^[1], 他得出了规范势是克氏符, 规范场强是黎曼张量. Kibble 在 1960 年基于 Utiyama 的基础, 将这个理论更加形式化^[2]. 杨振宁在 1974 年也用他自己的 Yang-Mills 理论将引力规范化^[3].

Lorentz 对称性是当代物理学的基础. 自从麦克斯韦方程组的问世, 爱因斯坦在看到麦克斯韦方程组美妙的同时, 也看到了这个方程组是有 Lorentz 对称性的. 这一观点彻底颠覆了牛顿时代的时空观. 爱因斯坦将这个对称性用在了他的第一个理论——狭义相对论中. 随着时间的推移, 物理学家们开始思考如果没有 Lorentz 对称性会产生怎样的物理, 而这些暗示出现在了大尺度的物理图像上.

CMB 是宇宙早期光子退耦时的辐射. 从 CMB 的数据可以看到, 我们的本星系团相对于 CMB 静止参考系以 627 ± 22 km/s 的速度沿银经 $l = 263.99^\circ \pm 0.14^\circ$, $b = 48.26^\circ \pm 0.03^\circ$ 方向运动, 这个运动导致偶极矩各向异性. 从理论角度看, CMB 静止参考系的存在即使在远离任何星系的地方都破坏了 Lorentz 协变性^[4]. CMB 数据还存在低多级矩和其他反常, 诸如非常大尺度的各向异性、反常排列和非高斯分布等, 其中持续时间最长的争论来自于低 $-l$ 多级矩: 球谐展开 $l=2$ 的四级矩振幅与大爆炸预言相比过低, $l=3$ 的四级矩与八级矩模式间有无法解释的联系并与黄道面和黄道面与天球赤道两个交点连线有联系, 这个连线也被称为邪恶轴心^[5].

马赫原理说明局域惯性标架由大尺度物质分布确定, 其可以被更一般地陈述为: 局域物理规律由宇宙的大尺度结构确定^[6]. 这为我们思考大尺度上 Lorentz 对称性的问题提供了参考.

CMB 的非各向同性以及对马赫原理的思考暗示了 Lorentz 对称性在小尺度上破缺而在大尺度上累积成客观效应的可能性.

1999 年, Coleman 和 Galshow 提出了偏离 Lorentz 对称性的一个模型^[7]. 这个模型保时空平移以及空间转动不变性, 而允许对伪转动的改变; 这个模型用一个常的类时 4 矢(刺矢)来参数化. 而后 Colladay 和 Kostelecky 引入了更一般的刺矢导致的扰动, 这些量可以看成是由于 Lorentz 对称性破缺而导致的某些张量的非零的真空期望值^[8].

2000 年, Amelino-Camelia 提出了双狭义相对论^[9]. 这个理论也称为有两个观测者不依赖尺度的狭义相对论: 一个是有速度量纲的 c ; 一个是有质量量纲的 κ . 前者可以认同为光速, 后者可以认同的 Planck 质量; 而在 $\kappa \rightarrow \infty$ 时理论回到狭义相对论. 因此这个理论本身是狭义相对论破缺的.

CPT(Charge conjugation-Parity-Time reversal, CPT)对称性也是当代物理的最严格的对称性之一; 而这个对称性和 Lorentz 群有着非常紧密的联系. 我们发现, 在某些理论中 CP 和 P 会出现破缺, 这暗示着 P、T 对称性并非是严格不变的. 而 Lorentz 群(固有)加上 P、T 对称性才是最大 Lorentz 群. 这就暗示, Lorentz 群(固有)也可能会破缺.

2006 年, Cohen 和 Glashow 提出了狭义相对论对称性破缺的机制, 这个理论称为非常狭义相对论^[10]. 时空对称性不再是 Lorentz 群(Poincare 群), 而是 Lorentz 群的子

群: $E(2)$; $HOM(2)$; $SIM(2)$. 他们发现狭义相对论中要求的时间变化、速度叠加等不需要 Lorentz 群而只需要其子群就可以实现. 其条件是, 子群加入 P 、 T 就可以扩张成完整的 Lorentz 群. 在这些子群中, 破缺程度最小的就是 4 生成元子群 $SIM(2)$ 群. 2007 年, Gibbons、Gomis 和 Pope 提出了 $SIM(2)$ 群作为时空局部对称群模型, 他们发现这个模型具有 Finsler 几何的性质^[11].

我们以 $SIM(2)$ 群为局域规范对称群, 并将其用于规范理论.

1 $SIM(2)$ 引力规范理论

本文的一些记号规范参考了文献 [12-13].

Lorentz 度规的表达式为

$$\eta_{ab} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1)$$

定义标架 h^a_μ , 它满足

$$\eta_{ab} = g_{\mu\nu} h^a_\mu h^b_\nu. \quad (2)$$

其结构系数可以表示为

$$f^c_{ab} = (h^a_\mu h^b_\nu - h^b_\mu h^a_\nu) \partial_\nu h^c_\mu. \quad (3)$$

因此

$$f^c_{ab} = -f^c_{ba}. \quad (4)$$

Lorentz 李代数有 6 个独立生成元, 其满足的对易子为

$$[M_{ab}, M_{cd}] = i(\eta_{bc}M_{ad} - \eta_{ac}M_{bd} - \eta_{bd}M_{ac} + \eta_{ad}M_{bc}), \quad (5)$$

其中, 对应角动量生成元的为

$$J_1 = M_{23}, J_2 = M_{31}, J_3 = M_{12}. \quad (6)$$

对应伪转动 (boost) 生成元的为

$$K_1 = M_{10}, K_2 = M_{20}, K_3 = M_{30}. \quad (7)$$

用角动量和伪转动生成元表示, 对易关系可以写成

$$\begin{aligned} [J_i, J_j] &= i\varepsilon_{ijk}J_k, \\ [J_i, K_j] &= i\varepsilon_{ijk}K_k, \\ [K_i, K_j] &= -i\varepsilon_{ijk}J_k. \end{aligned} \quad (8)$$

$SIM(2)$ 生成元为

$$\begin{aligned} T_1 &= K_1 + J_2 = M_{10} + M_{31}, \\ T_2 &= K_2 - J_1 = M_{20} - M_{23}, \\ J_3 &= M_{12}, K_3 = M_{30}. \end{aligned} \quad (9)$$

Lorentz 联络 A_μ 具体展开的形式为

$$A_\mu = A^{10}_\mu M_{10} + A^{20}_\mu M_{20} + A^{30}_\mu M_{30} + A^{12}_\mu M_{12} + A^{23}_\mu M_{23} + A^{31}_\mu M_{31}. \quad (10)$$

M_{ab} 对下标反称, 这使得与其缩并的 A^{ab}_μ 也是反称的. 这个联络定义的协变导数算符为

$$D_\mu = \partial_\mu - \frac{i}{2} A^{ab}_\mu M_{ab}. \quad (11)$$

实际上, M_{ab} 是 Lorentz 李代数的表示, 由于我们选择切空间, 故为 Lorentz 群的矢量表示.

为了将李代数限制在 SIM(2) 上, 我们施加限制方程

$$A^{10}_\mu - A^{31}_\mu = 0, \quad A^{20}_\mu + A^{23}_\mu = 0. \quad (12)$$

有了这样的限制, 就从 Lorentz 时空规范理论得到 SIM(2) 时空规范理论.

与 $A^a_{b\mu}$ 相对应的线性联络 $\Gamma^\rho_{\nu\mu}$ 满足

$$\Gamma^\rho_{\nu\mu} = h_a{}^\rho D_\mu h^a{}_\nu = h_a{}^\rho \partial_\mu h^a{}_\nu + h_a{}^\rho A^a_{b\mu} h^b{}_\nu, \quad (13)$$

这可以分解为克氏符和 contorsion

$$\Gamma^\rho_{\mu\nu} = \Gamma'^\rho_{\mu\nu} + K^\rho_{\mu\nu}. \quad (14)$$

A^c_{ab} 写成 f^c_{ab} 以及挠率 T^c_{ab} 的函数, 满足

$$A^a_{bc} = \frac{1}{2} (f_b{}^a{}_c + T_b{}^a{}_c + f_c{}^a{}_b + T_c{}^a{}_b - f^a{}_{bc} - T^a{}_{bc}). \quad (15)$$

曲率和自旋联络间满足

$$R^{ab}_{\mu\nu} = \partial_\mu A^{ab}_\nu - \partial_\nu A^{ab}_\mu + A^a_{c\mu} A^{cb}_\nu - A^a_{c\nu} A^{cb}_\mu. \quad (16)$$

可以写成时空指标的形式

$$R^\rho_{\lambda\nu\mu} = h_a{}^\rho h^b{}_\lambda R^a_{b\nu\mu} = \Gamma^\rho_{\lambda\mu,\nu} - \Gamma^\rho_{\lambda\nu,\mu} + \Gamma^\rho_{\eta\nu} \Gamma^\eta_{\lambda\mu} - \Gamma^\rho_{\eta\mu} \Gamma^\eta_{\lambda\nu}. \quad (17)$$

仍然将拉氏量选取为标量曲率. 根据曲率张量, 标量曲率可以写为

$$R = h_a{}^\nu h_b{}^\mu R^{ab}_{\nu\mu} = h_a{}^\nu h_b{}^\mu (A^{ab}_{\mu,\nu} - A^{ab}_{\nu,\mu} + A^a_{e\nu} A^{eb}_\mu - A^a_{e\mu} A^{eb}_\nu). \quad (18)$$

Lorentz 时空规范理论的作用量是 Hilbert 作用量, 而 SIM(2) 时空规范理论有两个约束, 相当于要再作用两个约束乘子项, 作用量为

$$S_E = \frac{1}{16\pi G} \int \sqrt{-g} (R + \lambda_1{}^\mu (A^{10}_\mu - A^{31}_\mu) + \lambda_2{}^\mu (A^{20}_\mu + A^{23}_\mu)) d^4x. \quad (19)$$

我们对自旋联络做变分, 结果为

$$\begin{aligned} \delta_A S_E &= \frac{1}{16\pi G} \int d^4x h \delta_A (R^{ab}_{ab} + \lambda_1{}^\mu (A^{10}_\mu - A^{31}_\mu) + \lambda_2{}^\mu (A^{20}_\mu + A^{23}_\mu)) \\ &= \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \delta A^{ab}_\mu \left[\begin{aligned} &-D_\nu (h (h_a{}^\nu h_b{}^\mu - h_a{}^\mu h_b{}^\nu)) \\ &+ \lambda_1{}^\mu h (\delta_a{}^1 \delta_b{}^0 - \delta_a{}^3 \delta_b{}^1) + \lambda_2{}^\mu h (\delta_a{}^2 \delta_b{}^0 - \delta_a{}^2 \delta_b{}^3) \end{aligned} \right], \end{aligned} \quad (20)$$

其中,

$$\begin{aligned} & D_\nu (h (h_a^\nu h_b^\mu - h_a^\mu h_b^\nu)) \\ &= \partial_\nu (h (h_a^\nu h_b^\mu - h_a^\mu h_b^\nu)) - h (h_c^\nu h_b^\mu - h_c^\mu h_b^\nu) A_{a\nu}^c - h (h_c^\nu h_a^\mu - h_c^\mu h_a^\nu) A_{b\nu}^c. \end{aligned} \quad (21)$$

这个结果可以写为

$$-D_\nu (h (h_a^\nu h_b^\mu - h_a^\mu h_b^\nu)) + \lambda_1^\mu h (\delta_a^1 \delta_b^0 - \delta_a^3 \delta_b^1) + \lambda_2^\mu h (\delta_a^2 \delta_b^0 - \delta_a^2 \delta_b^3) = 0. \quad (22)$$

由于

$$D_\alpha (h (h_a^\alpha h_b^\beta - h_a^\beta h_b^\alpha)) = h (h_c^\beta T_{ba}^c - h_a^\beta T_{bc}^c + h_b^\beta T_{ac}^c), \quad (23)$$

因此对 SIM(2) 规范理论, 即使是没有物质场的情况下, 挠率也不再为 0. 我们得到

$$\begin{aligned} & h_c^\beta (T_{01}^c + T_{13}^c) + (h_0^\beta - h_3^\beta) T_{1c}^c + h_1^\beta (T_{3c}^c - T_{0c}^c) = 0, \\ & h_c^\beta (T_{02}^c + T_{32}^c) - h_2^\beta (T_{0c}^c + T_{3c}^c) + (h_0^\beta + h_3^\beta) T_{2c}^c = 0. \end{aligned} \quad (24)$$

对其他的 (a, b) 有

$$D_\nu (h (h_a^\nu h_b^\mu - h_a^\mu h_b^\nu)) = 0, \quad (25)$$

对标架变分

$$\delta_h S_E = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \left[\delta h R_{ab}^{ab} + h (\partial_\nu A_{\mu}^{ab} + A_{e\nu}^a A_{\mu}^{eb}) \delta h (h_a^\nu h_b^\mu - h_a^\mu h_b^\nu) \right. \\ \left. + (A_{\mu}^{10} - A_{\mu}^{31}) \delta (h \lambda_1^\mu) + (A_{\mu}^{20} + A_{\mu}^{23}) \delta (h \lambda_2^\mu) \right]. \quad (26)$$

由于约束方程, 我们得到的动力学方程在形式上和 Einstein 方程一样

$$R^a_c - \frac{1}{2} \delta_c^a R = 0. \quad (27)$$

我们仍然将此称为 Einstein 方程. 但要注意两点: 第一, 实质上这个方程还要和约束方程联立, 因此, 曲率和 Hilbert 作用量的结果不同; 第二, 这个方程的 contorsion 并不为 0, 因此其规范势和广义相对论的不同.

我们具体的求解思路是将所有的量都表达为 contorsion K 和结构系数 f 的表达式.

将自旋联络写成 contorsion 的形式有

$$A_{bc}^a = A'^a_{bc} + K^a_{bc}, \quad (28)$$

其中,

$$\begin{aligned} A'^a_{bc} &= \frac{1}{2} (f_b^a{}_c + f_c^a{}_b - f^a{}_{bc}), \\ K^a_{bc} &= \frac{1}{2} (T_b^a{}_c + T_c^a{}_b - T^a{}_{bc}). \end{aligned} \quad (29)$$

约束条件可以用 contorsion 和 f 表达

$$\begin{aligned} K^{10}_c - K^{31}_c &= \frac{1}{2} (f^{10}_c - f^{31}_c - f^{01}_c - f_c^{10} + f^{13}_c + f_c^{31}), \\ K^{20}_c + K^{23}_c &= \frac{1}{2} (f^{20}_c + f^{23}_c - f^{02}_c - f_c^{32} - f_c^{20} - f_c^{23}). \end{aligned} \quad (30)$$

我们用 contorsion 表达

$$D_\nu(h(h_a^\alpha h_b^\beta - h_a^\beta h_b^\alpha)) = h[\eta_{bd}(K^{dc}_a - \delta_a^c K^{de}_e) + \eta_{ad}(K^{cd}_b - \delta_b^c K^{ed}_e)]h_c^\beta, \quad (31)$$

可以写成

$$\begin{aligned} & \eta_{0d}(K^{dc}_1 - \delta_1^c K^{de}_e) + \eta_{1d}(K^{cd}_0 - \delta_0^c K^{ed}_e) \\ &= -\eta_{1d}(K^{dc}_3 - \delta_3^c K^{de}_e) - \eta_{3d}(K^{cd}_1 - \delta_1^c K^{e3}_e), \\ & \eta_{0d}(K^{dc}_2 - \delta_2^c K^{de}_e) + \eta_{2d}(K^{cd}_0 - \delta_0^c K^{ed}_e) \\ &= -\eta_{3d}(K^{dc}_2 - \delta_2^c K^{de}_e) - \eta_{2d}(K^{cd}_3 - \delta_3^c K^{e3}_e). \end{aligned} \quad (32)$$

对得到的

$$K^{0c}_3 - \delta_3^c K^{0e}_e = K^{c3}_0 - \delta_0^c K^{e3}_e$$

和

$$K^{2c}_1 - \delta_1^c K^{2e}_e + K^{c1}_2 - \delta_2^c K^{e1}_e = 0 \quad (33)$$

联立, 就能得到

$$\begin{aligned} K^{12}_0 &= K^{23}_1, \quad K^{12}_1 = K^{30}_2, \quad K^{12}_2 = K^{30}_1, \quad K^{12}_3 = -K^{10}_2, \\ K^{31}_0 &= K^{10}_3, \quad K^{31}_1 = K^{23}_2, \quad K^{31}_2 = -K^{23}_1, \quad K^{31}_3 = K^{10}_0, \\ K^{23}_0 &= -K^{20}_3, \quad K^{23}_2 = -K^{30}_3, \quad K^{23}_3 = -K^{20}_0, \\ K^{30}_0 &= -K^{10}_1, \\ K^{20}_1 &= K^{10}_2, \quad K^{20}_2 = -K^{10}_1, \quad K^{20}_3 = -K^{20}_0, \\ K^{10}_3 &= K^{10}_0, \end{aligned} \quad (34)$$

以及

$$\begin{aligned} K^{10}_1 + K^{30}_3 &= f^1_{01} - f^1_{31}, \\ K^{10}_2 + K^{23}_1 &= \frac{1}{2}(-f^1_{20} + f^1_{23} - f^2_{10} - f^2_{31}), \\ K^{20}_0 &= \frac{1}{4}(-f^0_{23} + f^2_{30} + f^3_{20} - 2f^3_{23}), \end{aligned} \quad (35)$$

以及

$$\begin{aligned} 2f^0_{10} + f^0_{31} - f^1_{30} + f^3_{10} &= 0, \\ f^0_{10} - f^1_{30} - f^3_{31} &= 0, \\ f^0_{20} - f^2_{30} + f^3_{23} &= 0, \\ f^0_{12} + f^3_{12} &= 0, \\ -f^1_{10} - f^1_{31} &= f^2_{20} - f^2_{23}. \end{aligned} \quad (36)$$

我们发现独立的 contorsion 变成了 8 个, 而限制方程也为 8 个, 因此正好能够求解.

另一方面, 对标架求变分得到的 Einstein 方程在时空指标下可以写为

$$\begin{aligned} R_{\lambda\mu} &= \partial_\rho \Gamma'^\rho_{\lambda\mu} - \partial_\mu \Gamma'^\rho_{\lambda\rho} + \Gamma'^\rho_{\eta\rho} \Gamma'^\eta_{\lambda\mu} - \Gamma'^\rho_{\eta\mu} \Gamma'^\eta_{\lambda\rho} \\ &+ \partial_\rho K^\rho_{\lambda\mu} - \partial_\mu K^\rho_{\lambda\rho} \\ &+ \Gamma'^\rho_{\eta\rho} K^\eta_{\lambda\mu} + K^\rho_{\eta\rho} \Gamma'^\eta_{\lambda\mu} - \Gamma'^\rho_{\eta\mu} K^\eta_{\lambda\rho} - K^\rho_{\eta\mu} \Gamma'^\eta_{\lambda\rho} \\ &- K^\rho_{\eta\mu} K^\eta_{\lambda\rho} + K^\rho_{\eta\rho} K^\eta_{\lambda\mu}, \end{aligned} \quad (37)$$

其中, $K^\mu_{\nu\rho} = h_a^\mu h^b_\nu h^c_\rho K^a_{bc}$. 式(37)的第一行就是里奇张量, 余下部分就是时空指标的 contorsion 的贡献. 这又给出 10 个方程, 加上 10 个度规分量, 因此, 总共是 18 个未知量和 18 个方程.

我们求解的是真空 Einstein 方程. 我们将里奇张量记作 $\tilde{R}_{\lambda\mu}$, 则真空方程可以写成

$$\begin{aligned} -\tilde{R}_{\lambda\mu} = & \partial_\rho K^\rho_{\lambda\mu} - \partial_\mu K^\rho_{\lambda\rho} \\ & + \Gamma'^\rho_{\eta\rho} K^\eta_{\lambda\mu} + K^\rho_{\eta\rho} \Gamma'^\eta_{\lambda\mu} - \Gamma'^\rho_{\eta\mu} K^\eta_{\lambda\rho} - K^\rho_{\eta\mu} \Gamma'^\eta_{\lambda\rho} \\ & - K^\rho_{\eta\mu} K^\eta_{\lambda\rho} + K^\rho_{\eta\rho} K^\eta_{\lambda\mu}, \end{aligned} \quad (38)$$

这相当于求解一个非真空的方程. 实际上, 对 Einstein 方程

$$\tilde{R}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\tilde{R} = (T_{SIM(2)})_{\mu\nu}, \quad (39)$$

$(T_{SIM(2)})_{\mu\nu}$ 就是 $K_{\mu\nu}$ 所贡献的物质场. 这说明即使在没有物质场的情况下, 由于 SIM(2) 群也会贡献一个类似物质场的量, 这个量可以被用来作为暗物质的候选者. 而实际上, 我们发现对平直时空也满足所有的约束方程, 在这种情况下, contorsion 也全部为 0.

我们选取一般柱对称系, 度规张量为一般柱对称度规

$$\begin{pmatrix} V(\rho, z)^2 & 0 & 0 & -V(\rho, z)^2 w(\rho, z) \\ 0 & -\Omega(\rho, z)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\Omega(\rho, z)^2 \Lambda(\rho, z)^2 & 0 \\ -V(\rho, z)^2 w(\rho, z) & 0 & 0 & V(\rho, z)^2 w(\rho, z)^2 - \frac{\rho^2}{V(\rho, z)^2} \end{pmatrix}. \quad (40)$$

选取合适的 Lorentz 变换, 要求满足 8 个约束方程. 史瓦西度规在恒星或星系尺度下是闵氏度规的弱场近似, 其特征参数为 $\frac{GM/c^2}{R_c}$, 其中, R_c 是恒星或星系尺度, c 是光速, G 是万有引力常数, M 是恒心或星系的质量 (如太阳的这个参数就约等于 2×10^{-6}). 我们也要求柱对称度规满足弱场近似 (但不要求远场是弱场), 并用这个特征参数 (为简单起见, 记作 ε) 作为展开参数. 展开到一阶, 我们发现满足约束的度规的形式为

$$\begin{pmatrix} 1 + 2\varepsilon V(\rho, z) & 0 & 0 & -[1 + 2\varepsilon V(\rho, z)]\varepsilon a \\ 0 & -\frac{[1 + 2\varepsilon V(\rho, z)]}{[1 + 2\varepsilon f(\rho)]} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{[1 + 2\varepsilon h(z)]}{[1 + 2\varepsilon V(\rho, z)]} & 0 \\ -[1 + 2\varepsilon V(\rho, z)]\varepsilon a & 0 & 0 & \varepsilon^2 a^2 [1 + 2\varepsilon V(\rho, z)] - \frac{\rho^2}{1 + 2\varepsilon V(\rho, z)} \end{pmatrix}. \quad (41)$$

将这个结果代入场方程, 发现在一阶情况下 $V(\rho, z) = 0$. 接下来, 我们分析这个度规的性质. 对四速有

$$g_{\mu\nu}U^\mu U^\nu = 1. \quad (42)$$

由于运动轨迹在一个平面上, 我们选择一个平面. 根据度规我们看到 2 个 Killing 矢量: $\frac{\partial}{\partial t}$ 和 $\frac{\partial}{\partial \varphi}$. 由此可以定义两个守恒量

$$E := \frac{\partial t}{\partial \tau} \quad (43)$$

和

$$L := \rho^2 \frac{\partial \varphi}{\partial \tau}, \quad (44)$$

其中, E 是能量, L 代表角动量. 将度规和守恒量代入可得

$$[1 + 2\varepsilon f(\rho)] \left(\frac{d\rho}{d\tau} \right)^2 = E^2 - 1 - \frac{L^2}{\rho^2} - 2\varepsilon a E \frac{L}{\rho^2}. \quad (45)$$

可以看出有效势为

$$U = 1 + \frac{L^2}{\rho^2} + 2\varepsilon a E \frac{L}{\rho^2}. \quad (46)$$

我们发现这个度规没有引力势, 只有离心势. 这导致没有稳定的轨道, 一旦受到径向的微扰就会趋向无穷远处.

[参 考 文 献]

- [1] UTIYAMA R. Invariant theoretical interpretation of interaction [J]. Physical Review, 1956, 101: 1597-1607.
- [2] KIBBLE T W B. Lorentz invariance and the gravitational field [J]. Journal of Mathematical Physics, 1961(2): 212-221.
- [3] YANG C N. Integral formalism for gauge fields [J]. Physical Review Letters, 1974, 33: 445-447.
- [4] ARKANI-HAMED N, CHENG H, LUTY M, et al. Universal dynamics of spontaneous Lorentz violation and a new spin-dependent inverse-square law force [J/OL]. Journal of High Energy Physics, 2005: JHEP07 [2005-07-13]. <http://dx.doi.org/10.1088/1126-6708/2005/07/029>.
- [5] SCHWARZ, D. J, STARKMAN G D, HUTERER D, et al. Is the low-l microwave background cosmic? [J]. Physical Review Letters. 2004, 93: 221301.
- [6] HAWKING S W, ELLIS G. Large scale structure of space-time [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 1973.
- [7] COLEMAN S R, GLASHOW S L. High-energy tests of lorentz invariance [J]. Physical Review D, 1999, 59: 116008.
- [8] CILLADAY D, KOSTELECKY V A. Lorentz-violating extension of the standard model [J]. Physical Review D, 1998, 58: 116002.
- [9] AMELINO-CAMELIA G. Testable scenario for relativity with minimum length [J]. Physics Letters B, 2001, 510: 255-263.
- [10] COHEN A G, GLASHOW S L. Very special relativity [J]. Physical Review Letters, 2006, 97: 021601.
- [11] GIBBONS G W, GOMIS J, POPE C N. General very special relativity is finsler geometry [J]. Physical Review D, 2007, 76: 081701.
- [12] RAMOND P. Field Theory: A Modern Primer [M]. Colorado: Westview Press, 1997.
- [13] ALDROVANDI R, PEREIRA J G. Teleparallel Gravity [M]. New York: Springer, 2013.

(责任编辑: 李 艺)