文章编号: 1000-5641(2017)01-0026-06

一些图的无符号拉普拉斯谱半径

陈媛媛[1], 牟善志[2], 王国平[1]

(1. 新疆师范大学 数学科学学院, 乌鲁木齐 830054;
2. 江苏理工学院 数学系，江苏 常州 213001)

摘要: 令 $A(G)$ 表示 G 的邻接矩阵, $Q(G)=D(G)+A(G)$ 是 G 的无符号拉普拉斯矩阵, $Q(G)$ 的最大特征值是 G 的无符号拉普拉斯谱半径. 在这篇文章中, 我们分别确定了给定点连通度、给定块数和给定悬挂点数的图类中无符号拉普拉斯谱半径最大的图的结构.

关键词: 无符号拉普拉斯谱半径; 点连通度; 块; 悬挂点

中图分类号: O157.5 **文献标志码:** A **DOI:** 10.3969/j.issn.1000-5641.2017.01.004

On the signless Laplacian spectral radius of some graphs

CHEN Yuan-yuan[1], MU Shan-zhi[2], WANG Guo-ping[1]

(1. *School of Mathematical Sciences, Xinjiang Normal University, Urumqi,* 830054, *China;*
(2. *Department of Mathematics, Jiangsu University of Technology, Changzhou Jiangsu* 213001, *China*)

Abstract: Let $A(G)$ be the adjacent matrix of G and $Q(G)=D(G)+A(G)$ is the signless Laplacian matrix of G. The signless Laplacian spectral radius of G is the largest eigenvalue of $Q(G)$. In this paper we characterize the graphs with the maximum signless Laplacian spectral radii among the graphs with given vertex connectivity, among the graphs with given number of blocks and among the graphs with given pendant vertices, respectively.

Key words: signless Laplacian spectral radius; vertex connectivity; block; pendant vertex

0 引 言

本文中考虑的所有图都是简单的, 非定向和有限的图. 让 G 是一个点集为 $V(G)=\{v_1,\cdots,v_n\}$ 的图, 设 $A(G)$ 是图 G 的邻接矩阵, $D(G)=\mathrm{diag}(d_1,d_2,\cdots,d_n)$ 是由点度构成的对角矩阵, 图 G 的无符号拉普拉斯矩阵为 $Q(G)=D(G)+A(G)$. 对于图 G, 我们记 $q(G)$ 为无符号拉普拉斯矩阵 $Q(G)$ 的最大特征值, 并且称它为图 G 的无符号拉普拉斯谱半径.

收稿日期: 2015-12-29

基金项目: 国家自然科学基金(11461071); 新疆师范大学研究生科技创新项目(XSY201602012)

第一作者: 陈媛媛, 女, 硕士研究生, 研究方向为图论. E-mail: 312508075@qq.com.

通信作者: 王国平, 男, 教授, 研究方向为图论. E-mail: xj.wgp@163.com.

近年来, 研究者做了许多关于无符号拉普拉斯谱半径的研究工作. Zhang 等[1]分别刻画了在所有给定割边数的二部图和二部双圈图中具有最大拉普拉斯谱半径的图. Li 和 Shiu[2] 分别确定了在所有树、二部单圈图、三圈图和拟树中拉普拉斯谱半径最大的图. Abreu 和 Cardoso[3] 给出了有 k 对共邻点的 n 阶图 G 的无符号拉普拉斯谱. Ning 和 Li[4] 刻画了非正则图的无符号拉普拉斯谱半径. Cai 和 Fan[5]得到了在所有给定色数的图中拉普拉斯谱半径最大的图. 更多与之相关的结果, 可以查阅文献 [6-10].

一个图 G 的点连通度是使图不连通或成为平凡图所需删除的点的最小个数. 图 G 的割点是删除后使图的连通分支数增加的点. 图 G 的块是指没有割点的极大连通子图. 图 G 的团是 G 的极大完全子图, 团数是图 G 的最大团的阶数. 图 G 的点割是由点做成的集合, 删除这个集合中的点后使得图变的不连通. 由 k 个元素做成的点割集称为 k-点割.

Li 和 Shiu[11] 确定了在连通度至多为 k 的所有二部图中拉普拉斯谱半径最大的图. Liu[12] 给出了有 n 个点和 k 个悬挂点的 c-圈图中拉普拉斯谱半径最大的图. Ye 和 Fan[13] 刻画了给定点或边连通度的所有图中无符号拉普拉斯谱半径或谱半径最大的图. Wang[14] 确定了在给定割点数的图中无符号拉普拉斯谱半径最大的图. Berman[15] 描述了给定割点数的图中谱半径最大的图. Wu[16] 给出了在所有给定悬挂点数的树中谱半径最大的图. Lin 和 Yang[7] 分别刻画了在所有给定点连通度和边连通度的定向图中距离谱半径最小的定向图.

我们用 $\mathfrak{g}_{k,n}$ 表示点数为 n, 点连通度为 k 的图类；G_n^p 表示点数为 n, 块数为 p 的图类；$G_n(k)$ 表示点数为 n, 悬挂点数为 k 的图类. 在这篇文章中, 我们分别刻画了在 $\mathfrak{g}_{k,n}$, G_n^p 和 $G_n(k)$ 中无符号拉普拉斯谱半径最大的图.

1 $\mathfrak{g}_{k,n}$ 中无符号拉普拉斯谱半径最大的图

若 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$, 那么它可以被看作是定义在图 G 的点集 $V(G)=\{v_1,\cdots,v_n\}$ 上的函数, 即 $x(v_i)=x_i$, 并且 $x^{\mathrm{T}}Q(G)x=\sum\limits_{uv\in E(G)}(x(u)+x(v))^2$.

对于 $V(G)$ 中的每一个点 v, 让 $N_G(v)$ (或简写为 $N(v)$)表示图 G 中点 v 的邻点集. 假设 x 是 $Q(G)$ 关于特征值 $q(G)$ 的一个特征向量, 那么 $q(G)x(v)=\sum\limits_{u\in N(v)}(x(v)+x(u))$.

若两个图 G 和 G' 是同构的, 则记为 $G\cong G'$.

引理 1.1[18] 若连通图 G 的阶数 $n\geqslant 2$, 则 $q(G)\geqslant \Delta(G)+1$, 等号成立当且仅当 $G\cong S_n$. 这里 $\Delta(G)$ 是 G 的最大度, S_n 是 n 个点的星图.

假设 u 和 v 是图 G 中不相邻的两个点, 我们把在图 G 中加上边 uv 得到的图记为 $G+uv$. 因为加一条新的边 uv 使点 u 和 v 的度数增加, 所以我们有下面的结论.

引理 1.2 让 G 是一个有两个不相邻的点 u 和 v 的连通图, 那么 $q(G+uv)>q(G)$.

假设 H_1 和 H_2 是两个点不交的连通图, 让 $H_1\cup H_2$ 表示由图 H_1 和图 H_2 得到的, 使得图 $H_1\cup H_2$ 的边集为 $E(H_1\cup H_2)=E(H_1)\cup E(H_2)$, 点集为 $V(H_1\cup H_2)=V(H_1)\cup V(H_2)$ 的图；图 H_1+H_2 是通过连接 $H_1\cup H_2$ 中 图 H_1 和图 H_2 的每一对点得到的.

由著名的 Perron-Forbinus 定理知, 对于简单连通图 G 有分量为全正的特征向量与其无符号拉普拉斯谱半径 $q(G)$ 相对应, 称这样的分量为正的单位特征向量为图 G 的 Perron 向量.

引理 1.3 若 $n_2\geqslant n_1\geqslant 2$, 则有 $q(K_k+(K_{n_1-1}\cup K_{n_2+1}))>q(K_k+(K_{n_1}\cup K_{n_2}))$.

证　明 令 $G=K_k+(K_{n_1}\cup K_{n_2})$, $G'=K_k+(K_{n_1-1}\cup K_{n_2+1})$. 若 $u\in V(K_{n_1})$, 则明

显地有 $G' \cong G - \sum\limits_{w\in V(K_{n_1})} uw + \sum\limits_{w\in V(K_{n_2})} uw$.

假设 x 是图 G 的 Perron 向量, 由对称性可知, 对于 $w \in V(K_{n_1})$ 有 $x(w) = a$；对于 $w \in V(K_k)$ 有 $x(w) = b$；对于 $w \in V(K_{n_2})$ 有 $x(w) = c$. 因此, 由 $Q(G)x = q(G)x$, 我们得到

$$\begin{cases} q(G)(a) = (n_1-1)(a+a) + k(a+b) = (2n_1+k-2)a + kb, \\ q(G)(c) = (n_2-1)(c+c) + k(c+b) = (2n_2+k-2)c + kb, \end{cases}$$

通过对上述式子的计算, 可以得到 $(q(G) - (2n_1+k-2))(c-a) = 2(n_2-n_1)c$.

注意到, $n_2 \geqslant n_1 \geqslant 2$, $\Delta(G) = n-1$ 且 $n = n_1 + n_2 + k$. 由引理 1.1, 可以得到 $q(G) \geqslant 2n_1 + k$, 且 $c \geqslant a$.

又注意到, $x^{\mathrm{T}}(Q(G') - Q(G))x$

$$\begin{aligned} &= \sum_{w_i\in V(K_{n_2})} (x(u)+x(w_i))^2 - \sum_{w_j\in V(K_{n_1}-\{u\})} (x(u)+x(w_j))^2 \\ &= n_2(a+c)^2 - 4(n_1-1)a^2 \\ &= n_2c^2 - (n_1-1)a^2 + 2a(n_2c - (n_1-1)a) + (n_2-n_1+1)a^2 \\ &> n_2(c^2-a^2) + 2n_2a(c-a) + (n_2-n_1+1)a^2 \geqslant 0. \end{aligned}$$

所以, $q(G') \geqslant x^{\mathrm{T}}Q(G')x > x^{\mathrm{T}}Q(G)x = q(G)$.

若 X 是 $V(G)$ 的子集, 我们用 $G[X]$ 表示由集合 X 导出的图 G 的子图, 并且用 $G-X$ 表示图 $G[V\backslash X]$.

定理 1.4 若图 G 是所有 $\mathfrak{g}_{k,n}$ 中无符号拉普拉斯谱半径最大的图, 则有 $G \cong K_k + (K_1 \cup K_{n-k-1})$.

证 明 若 $n = k+1$, 那么容易得到 $G \cong K_{k+1}$, 所以我们假定 $n \geqslant k+2$.

设 S 是图 G 的一个 k-点割, 那么我们有以下几点断言.

断言 1 G-S 恰包含两个分支.

假设 G-S 包含三个分支, 其中点 u_1 和 u_2 分别位于两个不同的分支 G_1 和 G_2 上, 那么 S 也是图 $G + u_1u_2$ 的 k-点割. 因为图 $G + u_1u_2$ 的点连通度不少于图 G 的点连通度, 所以 $G + u_1u_2 \in \mathfrak{g}_{k,n}$. 但是由引理 1.2, 我们知道 $q(G+u_1u_2) > q(G)$, 这与图 G 的极大性矛盾.

断言 2 $G[V(G_i) \cup S]$ 是一个完全图 $(i = 1, 2)$.

假设点 v_1 和 v_2 是图 $G[V(G_1) \cup S]$ 中两个不相邻的点, 那么我们很容易看到 $G + v_1v_2$ 仍然属于 $\mathfrak{g}_{k,n}$. 但是由引理 1.2, 我们有 $q(G+v_1v_2) > q(G)$, 与图 G 的极大性矛盾.

令 $n_1 = |V(G_1)|$, $n_2 = |V(G_2)|$, 其中 $n_2 \geqslant n_1$. 从上面的断言 1 和 2 中我们知道 $G \cong K_k + (K_{n_1} \cup K_{n_2})$.

若 $n_1 \geqslant 2$, 那么由引理 1.3 知道 $q(K_k + (K_{n_1-1} \cup K_{n_2+1})) > q(G)$. 这与图 G 的极大性矛盾, 所以 $n_1 = 1$, 也就是 $G \cong K_k + (K_1 \cup K_{n-k-1})$.

2 G_n^p 和 $G_n(k)$ 中无符号拉普拉斯谱半径最大的图

引理 2.1[19] 让 u 和 v 是连通图 G 中的两个不同的点, 假设 $v_1, v_2, \cdots, v_s\,(1 \leqslant s \leqslant d(v))$ 是集合 $N(v)\backslash N(u)$ 中不同于 u 的一些点. 让 x 是图 G 的 Perron 向量, 图 G' 是由图 G 通过删除边 vv_i 并且增加边 $uv_i\,(1 \leqslant i \leqslant s)$而得到的。若 $x(u) \geqslant x(v)$, 则有 $q(G') > q(G)$.

引理 2.2　假设 v 是图 G 的一个割点, 并且 v 点与集合 $V(K_{n_1})\cup V(K_{n_2})$ 中的所有点都相邻, 这里的 K_{n_1} 和 K_{n_2} 是 G-v 的两个分支. 令 $u\in V(K_{n_1})$, 并且 $G'=G-\sum\limits_{w\in V(K_{n_1})}uw+\sum\limits_{w\in V(K_{n_2})}uw$. 若 $n_2\geqslant n_1\geqslant 2$, 则有 $q(G')>q(G)$.

证　明　假设 x 是图 G 的 Perron 向量, 则由对称性, 对于 $w\in V(K_{n_1})$ 我们有 $x(w)=x_1$, 对于 $w\in V(K_{n_2})$ 我们有 $x(w)=x_2$. 因此, 由 $Q(G)x=q(G)x$, 可以得到

$$\begin{cases}q(G)x_1=(n_1-1)(x_1+x_1)+(x_1+x_v)=(2n_1-1)x_1+x_v,\\ q(G)x_2=(n_2-1)(x_2+x_2)+(x_2+x_v)=(2n_2-1)x_2+x_v,\end{cases}$$

通过对上述式子的计算, 我们有 $(q(G)-(2n_1-1))(x_2-x_1)=2(n_2-n_1)x_2$.

注意到, $n_2\geqslant n_1\geqslant 2$. 由引理 1.1, 有 $q(G)\geqslant n_1+n_2-1\geqslant 2n_1-1$, 所以 $x_2\geqslant x_1$.

又注意到 $x^{\mathrm{T}}(Q(G')-Q(G))x$

$$\begin{aligned}&=\sum_{w_i\in V(K_{n_2})}(x(u)+x(w_i))^2-\sum_{w_j\in V(K_{n_1}-\{u\})}(x(u)+x(w_j))^2\\&=n_2(x_1+x_2)^2-4(n_1-1)x_1^2\\&=n_2x_2^2-(n_1-1)x_1^2+2x_1(n_2x_2-(n_1-1)x_1)+(n_2-n_1+1)x_1^2\\&>n_2(x_2^2-x_1^2)+2n_2x_1(x_2-x_1)+(n_2-n_1+1)x_1^2\geqslant 0.\end{aligned}$$

因此, $q(G')\geqslant x^{\mathrm{T}}Q(G')x>x^{\mathrm{T}}Q(G)x=q(G)$.

我们用 K_{n-p}^{p} 表示在完全图 K_{n-p} 的某个点上加 p 条悬挂边后得到的图. 显然地, $K_{n-p+1}^{p-1}\in G_n^p$.

定理 2.3　若图 G 是所有 G_n^p 中无符号拉普拉斯谱半径最大的图, 则有 $G\cong K_{n-p+1}^{p-1}$.

证　明　我们将通过下面的三个断言来完成这个定理的证明.

断言 1　图 G 中的每一个块都是一个团.

假设在图 G 的某个块中有两个不相邻的点 u 和点 v, 那么通过在图 G 中连接点 u 和点 v, 我们得到图 $\widetilde{G}$, 显然有 $\widetilde{G}\in G_n^p$. 由引理 1.2 知道 $q(\widetilde{G})>q(G)$, 这与图 G 的极大性矛盾.

断言 2　图 G 恰好有一个割点 v.

假设图 G 中有两个割点 u 和 v, 如图 1 所示.

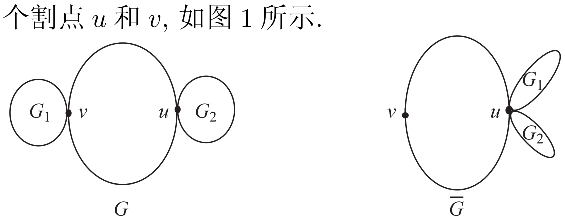

图 1　G 和 $\overline{G}$

Fig. 1　G and $\overline{G}$

假设 x 是图 G 的 Perron 向量, 若 $x(u)\geqslant x(v)$, 那么我们让 $\overline{G}=G-\sum\limits_{w\in N_{G_1}(v)}vw+\sum\limits_{w\in N_{G_2}(u)}uw$, 否则记 $\overline{G}=G-\sum\limits_{w\in N_{G_2}(u)}uw+\sum\limits_{w\in N_{G_1}(v)}vw$. 明显地, $\overline{G}\in G_n^p$, 由引理 2.1, 有 $q(\overline{G})>q(G)$, 这与图 G 的极大性矛盾.

断言 3　图 G 中最多只有一个块不同构于 K_2.

假设 K_{n_1} 和 K_{n_2} 是图 G 的两个块, 其中 $n_2 \geqslant n_1 \geqslant 3$. 让 $u \in V(K_{n_1})\backslash\{v\}$ 且 $G' = G - \sum\limits_{w\in V(K_{n_1}\backslash\{v\})} uw + \sum\limits_{w\in V(K_{n_2}\backslash\{v\})} uw$. 显然, $G' \in G_n^p$, 由引理 2.2, $q(G') > q(G)$, 这与图 G 的极大性矛盾.

结合以上的三个断言, 我们得到 $G = K_{n-p+1}^{p-1}$.

我们用 $D(n; n_1-1, n_2-1)$ 表示连接星图 S_{n_1} 和 S_{n_2} 的中心点 u 和 v 后得到的图, 这里 $n = n_1 + n_2$.

定理 2.4 假设图 G 是所有 $G_n(k)$ 中无符号拉普拉斯谱半径最大的图, 那么有

(i) 对于 $n \geqslant 1$, $0 \leqslant k < n-2$ 或 $k = n-1$, 有 $G \cong K_{n-k}^k$;

(ii) 对于 $n \geqslant 4$ 且 $k = n-2$, 有 $G \cong D(n; 1, n-3)$.

证　明 (i) 当 $k=0$, 1 或 $n-1$ 时, 结论是平凡的, 所以我们假设 $2 \leqslant k < n-2$. 让 S 是图 G 中所有非悬挂点作成的集合, 若点 u 和 v 是集合 S 中不相邻的两个点, 那么由引理 1.2 得到 $q(G+uv) > q(G)$, 这与图 G 的极大性矛盾, 所以 $G[S] \cong K_{n-k}$, 这表明图 G 是由在完全图 K_{n-k} 上加 k 条悬挂边得到的. 如果这 k 条悬挂边不在完全图 K_{n-k} 上的同一个点上, 例如点 u 和点 v 上各粘了一些悬挂边, 那么我们比较 $x(u)$ 和 $x(v)$ 的大小. 若 $x(u) \geqslant x(v)$, 则让 $G' = G - \sum\limits_{v_i\in N(v)\backslash\{u\}} vv_i + \sum\limits_{v_i\in N(v)\backslash\{u\}} uv_i$, 反之令 $G' = G - \sum\limits_{v_i\in N(u)\backslash\{v\}} uv_i + \sum\limits_{v_i\in N(u)\backslash\{v\}} vv_i$. 显然地, $G' \in G_n(k)$. 但是由引理 2.1 有 $q(G') > q(G)$, 与图 G 的极大性矛盾, 因此, $G \cong K_{n-k}^k$.

(ii) 假设 $G \ncong D(n; 1, n-3)$. 记 u 和 v 是图 G 中的两个非悬挂点, 若 $x(u) \geqslant x(v)$, 则让 $\overline{G} = G - \sum\limits_{v_i\in N(v)\backslash\{u\}} vv_i + \sum\limits_{v_i\in N(v)\backslash\{u\}} uv_i$, 反之记 $\overline{G} = G - \sum\limits_{v_i\in N(u)\backslash\{v\}} uv_i + \sum\limits_{v_i\in N(u)\backslash\{v\}} vv_i$. 显然地, $\overline{G} \in G_n(k)$. 但是由引理 2.1 有 $q(\overline{G}) > q(G)$, 这与图 G 的极大性矛盾, 所以有 $G \cong D(n; 1, n-3)$.

[参　考　文　献]

[1] ZHANG X. The Laplacian spectral radius of some bipartite graphs[J]. Linear Algebra Appl, 2008, 428: 1610-1619.

[2] LI J, SHIU W, CHAN W. On the Laplacians spectral radius of bipartite graphs[J]. Linear Algebra Appl, 2011, 435: 2183-2192.

[3] ABREU N, CARDOSO D. On the Laplacian and signless Laplacian spectrum of graph with k pairwise co-neighbor vertices[J]. Linear Algebra Appl, 2012, 437: 2308-2316.

[4] NING W, LI H. On the signless Laplacians spectral radius of irregular graphs[J]. Linear Algebra Appl, 2013, 438: 2280-2288.

[5] CAI G, FAN Y. The signless Laplacians spectral radius of graphs with chromatic number[J]. Math Appl, 2009, 22: 161-167.

[6] CVETKOVICL D, SIMIC S K. Towards a spectral theory of graphs based on signless Laplacian II[J]. Linear Algebra Appl, 2010, 432: 2257-2272.

[7] LIU H, LU M. On the spectral radius of graphs with cut edges[J]. Linear Algebra Appl, 2004, 389: 139-145.

[8] LIU M, LIU B L. The signless Laplacian spread[J]. Linear Algebra Appl, 2010, 432(2-3): 505-514.

[9] WANG J, HUANG Q. Some results on the signless Laplacians of graphs[J]. Applied Mathematics Letters, 2010, 23: 1045-1049.

[10] ZHANG M, LI S. On the signless Laplacian spectra of k-trees[J]. Linear Algebra Appl, 2015, 467: 136-148.

[11] LI J, SHIU W, CHAN W. The Laplacians spectral radius of some grapgs[J]. Linear Algebra Appl, 2009, 431: 99-103.

[12] LIU M. The (signless) Laplacian spectral radius of c-cyclic graphs with n vertices and k pendant vertices[J]. Electronic Journal of Linear Algebra, 2012, 23: 945-952.

[13] YE M, FAN Y Z. Maximizing signless Laplacian or adjacency spectral radius of graphs subject to fixed connectivity[J]. Linear Algebra Appl, 2010, 433: 1180-1186.

[14] WANG J F, HUANG Q X. Maximizing the signless Laplacians spectral radius of graphs with given diameter or cut vertices[J]. Linear and Multilinear Algebra, 2011, 59(7): 733-744.

[15] BERMAN A, ZHANG X D. On the spectral radius of graphs with cut vertices[J]. Journal of Combinatorial Theory, Series B, 2001, 83: 233-243.

[16] WU B F, XIAO E. The spectral radius of trees on k pendant vertices[J]. Linear Algebra Appl, 2005, 395: 343-349.

[17] LIN H Q, YANG W. Distance spectral radius of digraphs with given connectivity[J]. Discrete Mathematics, 2012, 312: 1849-1856.

[18] CVETKOVIC D, ROWLINSON P, SIMIC S K. Signless Laplacian of finite graphs[J]. Linear Algebra Appl, 2007, 423: 155-171.

[19] HONG Y, ZHANG X D. Sharp upper and lower bounds for largest eigenvalue of the Laplacian matrices of trees [J]. Discrete Mathematics, 2005, 296: 187-197.

(责任编辑: 李　艺)

(上接第 18 页)

[3] CHEN I J, PAULRAJ A. Understanding supply chain management: Critical research and a theoretical framework [J]. International Journal of Production Research, 2004, 42(1): 131-163.

[4] FISCHER T, GEHRING H. Planning vehicle transhipment in a seaport automobile terminal using a multi-agent system [J]. European Journal of Operational Research, 2005, 166(3): 726-740.

[5] BOSE F, WINDT K. Understanding Autonomous Cooperation and Control in Logistics [M]. Berlin: Springer, 2007: 351-363.

[6] MATTFELD D C, ORTH H. The allocation of storage space for transshipmentin vehicle distribution [C]// Container Terminals and Cargo Systems. Berlin: Springer, 2007: 267-290.

[7] MATTFELD D C, BIERWIRTH C. An efficient genetic algorithm for job shop scheduling with tardiness objectives [J]. European Journal of Operational Research, 2004, 155(3): 616-630.

[8] MATTFELD D C, KOPFER H. Terminal operations management in vehicle transshipment [J]. Transportation Research Part A, 2003, 37(6): 435-452.

[9] CORDEAU J F, MOCCIA G L. Optimizing yard assignment in an automotive transshipment terminal [J]. European Journal of Operational Research, 2011, 215(1): 149-160.

(责任编辑: 李　艺)