文章编号: 1000-5641(2018)03-0046-09

$A\overline{M}(s)$-凸函数及其 Jensen 型不等式

宋振云[1], 胡付高[2]

(1. 湖北职业技术学院 教务处, 湖北 孝感 432000;
2. 湖北工程学院 数学与统计学院, 湖北 孝感 432000)

摘要: 针对函数的凸性及其广义凸性, 研究凸函数的推广问题. 首先引入了 n 个正数的加权 r 次幂 s-平均的概念和记号, 并利用加权 r 次幂 s-平均定义了 $A\overline{M}(s)$-凸函数; 然后用符号化的方式讨论了 $A\overline{M}(s)$-凸函数的判定定理和运算性质; 最后, 证明了 $A\overline{M}(s)$-凸函数的 Jensen 型不等式, 并给出了其等价形式. 研究结果表明, $A\overline{M}(s)$-凸函数是包含众多凸函数的一类广义凸函数, 运用加权 r 次幂 s-平均定义和研究 $A\overline{M}(s)$-凸函数是对凸函数进行推广和研究的有效方法, 同时也为凸函数的拓展推广和深入研究探索了一条新的途径.

关键词: 加权r次幂s-平均; $A\overline{M}(s)$-凸函数; 判定定理; 运算性质; Jensen 型不等式
中图分类号: O178.1 **文献标志码**: A **DOI:** 10.3969/j.issn.1000-5641.2018.03.006

$A\overline{M}(s)$-Convex function and its Jensen-type inequality

SONG Zhen-yun[1], HU Fu-gao[2]

(1. *Dean's office, Hubei Polytechnic Institute, Xiaogan Hubei* 432000, *China*;
2. *School of Mathematics and Statistics, Hubei Engineering University, Xiaogan Hubei* 432000, *China*)

Abstract: Based on the convexity and general convexity of a function, the authors study extending issues of a convex function. Firstly, the concept and sign of weighted r-th power s-mean of n positives are introduced; secondly, the $A\overline{M}(s)$-convex function is defined by weighted r-th power s-mean; thirdly, the judgment theorem and operation properties of $A\overline{M}(s)$-convex function are discussed; and finally, the Jensen-type inequality of the $A\overline{M}(s)$-convex function is proved and an equivalent form is provided. The study shows that the $A\overline{M}(s)$-convex function is a subset of general convex functions that includes many convex functions. Studying the $A\overline{M}(s)$-convex function with the method of weighted r-th power s-mean is an effective way of extending and studying convex functions. This method explores a new approach to extending and studying convex functions.

Keywords: weighted r-th power s-mean; $A\overline{M}(s)$-convex function; judgment theorem; operation property; Jensen-type inequality

---

收稿日期: 2017-03-17
基金项目: 教育部科学技术研究重点项目(212109)
第一作者: 宋振云, 男, 教授, 研究方向为高等数学教学及凸分析. E-mail: hbsy12358@126.com.

0 引 言

设 $a_i \in \mathbf{R}^+, s \in (0,1], t_i \in [0,1] (i=1,2,\cdots,n)$, 且 $\sum\limits_{i=1}^{n} t_i = 1$, 记

$$\overline{M_n^{[r]}}(s) = \overline{M_n^{[r]}}(t_1^s, t_2^s, \cdots, t_n^s; a_1, a_2, \cdots, a_n) = \begin{cases} \left[\sum\limits_{i=1}^{n} t_i^s a_i^r\right]^{1/r}, & r \neq 0, \\ \prod\limits_{i=1}^{n} a_i^{t_i^s}, & r = 0, \\ \max\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}, & r = +\infty, \\ \min\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}, & r = -\infty. \end{cases} \tag{1}$$

则我们称 $\overline{M_n^{[r]}}(s) = \overline{M_n^{[r]}}(t_1^s, t_2^s, \cdots, t_n^s; a_1, a_2 \cdots, a_n)$ 为正数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的加权 r 次幂 s-平均. 特别地, 称 $\overline{M_n^{[1]}}(s) = t_1^s a_1 + t_2^s a_2 + \cdots + t_n^s a_n = \overline{A}_n(s)$、$\overline{M_n^{[0]}}(s) = a_1^{t_1^s} a_2^{t_2^s} \cdots a_n^{t_n^s} = \overline{G}_n(s)$、$\overline{M_n^{[-1]}}(s) = \frac{1}{t_1^s a_1^{-1} + t_2^s a_2^{-1} + \cdots + t_n^s a_n^{-1}} = \overline{H}_n(s)$、$\overline{M_n^{[2]}}(s) = \sqrt{t_1^s a_1^2 + t_2^s a_2^2 + \cdots + t_n^s a_n^2} = \overline{SR}_n(s)$、$\overline{M_n^{[-2]}}(s) = \sqrt{\frac{1}{t_1^s a_1^{-2} + t_2^s a_2^{-2} + \cdots + t_n^s a_n^{-2}}} = \overline{HS}_n(s)$、$\overline{M_n^{[3]}}(s) = \sqrt[3]{t_1^s a_1^3 + t_2^s a_2^3 + \cdots + t_n^s a_n^3} = \overline{CR}_n(s)$、$\overline{M_n^{[-3]}}(s) = \sqrt[3]{\frac{1}{t_1^s a_1^{-3} + t_2^s a_2^{-3} + \cdots + t_n^s a_n^{-3}}} = \overline{HC}_n(s)$ 分别为 n 元加权算术 s-平均、n 元加权几何 s-平均、n 元加权调和 s-平均、n 元加权平方根 s-平均、n 元加权调和平方根 s-平均、n 元加权立方根 s-平均, 以及 n 元加权调和立方根 s-平均.

显然, 当 $s=1$ 时, n 元加权 r 次幂 s-平均就是 n 元加权 r 次幂平均, 因此, 我们说 n 元加权 r 次幂 s-平均是 n 元加权 r 次幂平均的推广. 同时我们记 $\overline{M_n^{[r]}}(1) = M_n^{[r]}(t_1, t_2, \cdots, t_n; a_1, a_2, \cdots, a_n)$.

关于 n 元加权 r 次幂 s-平均的进一步研究, 鉴于本文主题的要求, 加之篇幅的限制, 此处不作讨论. 但为方便本文证明, 这里给出 n 元加权 r 次幂 s-平均的如下恒等关系式.

(Ⅰ) $[\overline{M_n^{[r]}}(t_1^s, t_2^s, \cdots, t_n^s; a_1, a_2, \cdots, a_n)]^r = \overline{M_n^{[1]}}(t_1^s, t_2^s, \cdots, t_n^s; a_1^r, a_2^r, \cdots, a_n^r)$;

(Ⅱ) $[\overline{M_n^{[r]}}(t_1^s, t_2^s, \cdots, t_n^s; a_1, a_2, \cdots, a_n)]^{-r} = \overline{M_n^{[-1]}}(t_1^s, t_2^s, \cdots, t_n^s; a_1^{-r}, a_2^{-r}, \cdots, a_n^{-r})$;

(Ⅲ) $[\overline{M_n^{[1]}}(t_1^s, t_2^s, \cdots, t_n^s; a_1, a_2, \cdots, a_n)]^{1/r} = \overline{M_n^{[r]}}(t_1^s, t_2^s, \cdots, t_n^s; a_1^{1/r}, a_2^{1/r}, \cdots, a_n^{1/r})$;

(Ⅳ) $[\overline{M_n^{[-1]}}(t_1^s, t_2^s, \cdots, t_n^s; a_1^{-r}, a_2^{-r}, \cdots, a_n^{-r})]^{-1/r} = \overline{M_n^{[r]}}(t_1^s, t_2^s, \cdots, t_n^s; a_1, a_2, \cdots, a_n)$;

(Ⅴ) $\exp \overline{M_n^{[1]}}(t_1^s, t_2^s, \cdots, t_n^s; a_1, a_2, \cdots, a_n) = \overline{M_n^{[0]}}(t_1^s, t_2^s, \cdots, t_n^s; \exp a_1, \exp a_2, \cdots, \exp a_n)$.

若 $a_i \in (1, +\infty), i = 1, 2, \cdots, n$, 则有

(Ⅵ) $\ln \overline{M_n^{[0]}}(t_1^s, t_2^s, \cdots, t_n^s; a_1, a_2, \cdots, a_n) = \overline{M_n^{[1]}}(t_1^s, t_2^s, \cdots, t_n^s; \ln a_1, \ln a_2, \cdots, \ln a_n)$;

(Ⅶ) 特别地, 当 $s=1$ 时, 有

(i) $M_n^{[1]}(t_1, t_2, \cdots, t_m, t_{m+1}, t_{m+2}, \cdots, t_n; a_1, a_2, \cdots, a_m, a_{m+1}, a_{m+2}, \cdots, a_n) = M_{n-m+1}^{[1]}(t_1 + t_2 + \cdots + t_m, t_{m+1}, \cdots, t_n; M_m^{[1]}(\frac{t_1}{t_1+t_2+\cdots+t_m}, \frac{t_2}{t_1+t_2+\cdots+t_m}, \cdots, \frac{t_m}{t_1+t_2+\cdots+t_m}; a_1, a_2, \cdots, a_m), a_{m+1}, \cdots, a_n) = M_{m+1}^{[1]}(t_1, t_2, \cdots, t_m, t_{m+1} + \cdots + t_n; a_1, a_2, \cdots, a_m, M_{n-m}^{[1]}(\frac{t_{m+1}}{t_{m+1}+\cdots+t_n}, \cdots, \frac{t_n}{t_{m+1}+\cdots+t_n}; a_{m+1}, \cdots, a_n))$.

进一步地, 若 $\forall x_1, x_2 \in \mathbf{R}^+$ 及 $\forall t_1, t_2, \alpha \in [0,1]$, 则有

(ii) $M_2^{[1]}(M_2^{[1]}(\alpha, 1-\alpha; t_1, t_2), 1 - M_2^{[1]}(\alpha, 1-\alpha; t_1, t_2); x_1, x_2) = M_2^{[1]}(\alpha, 1-\alpha; M_2^{[1]}(t_1, 1-t_1; x_1, x_2), M_2^{[1]}(t_2, 1-t_2; x_1, x_2))$.

注意: 当 $s=1$ 时, 恒等关系式 (Ⅰ)–(Ⅵ) 仍然成立, 此时, n 元加权 r 次幂 s-平均恒等关系式就是 n 元加权 r 次幂平均恒等关系式.

由此, 我们就可以利用加权 r 次幂平均和加权 r 次幂 s-平均很方便地给出各类凸函数的定义, 如 r 次幂平均 s-凸函数[1].

定义 1 设$\mathbf{I}\subseteq\mathbf{R}^{+}, s\in(0,1], f:\mathbf{I}\to\mathbf{R}^{+}$, 如果 $\forall x_1,x_2\in\mathbf{I}$ 及 $\forall t\in[0,1]$, 存在 $r\in\mathbf{R}$, 使得

$$f(M_2^{[r]}(t,1-t;x_1,x_2))\leqslant(\geqslant)\overline{M_2^{[r]}}(t^s,(1-t)^s;f(x_1),f(x_2)),$$

则称 $f(x)$ 为 $\mathbf{I}$ 上的 r 次幂平均 s-凸(凹)函数. 当 $r=1,0,-1,2,-2$ 时, 则 $f(x)$ 分别为 $\mathbf{I}$ 上的 s-凸函数[2]、几何 s-凸函数[3]、调和 s-凸函数[1]、平方 s-凸函数[4]、调和平方 s-凸函数[5]; 若 $s=1$ 且 $r=1,0,-1,2,-2$ 或 $r\in\mathbf{R}$ $(r\neq0)$, 则 $f(x)$ 分别为凸函数、几何凸函数[6-7]、调和凸函数[8]、平方凸函数[9]、调和平方凸函数[10]和 rP-凸函数[11](r-平均凸函数[12]、r-凸函数[13]、P 方凸函数[14]).

考虑凸函数的个性化特征, 针对凸函数、对数凸函数[15]、AH-凸函数[16]、AR-凸函数[17]、AM-凸函数[18] 和 s-凸函数[2]、对数 s-凸函数[19]的进一步推广问题, 本文利用加权 r 次幂 s-平均定义了 $A\overline{M}(s)$-凸函数, 并运用加权 r 次幂平均和加权 r 次幂 s-平均的公式化记号, 采用符号计算的方法讨论了 $A\overline{M}(s)$-凸函数的判定定理和运算性质, 建立了 $A\overline{M}(s)$-凸函数的 Jensen 型不等式, 给出了其相应的等价形式.

定义 2 设 $\mathbf{I}\subseteq\mathbf{R}^{+}, s\in(0,1], f:\mathbf{I}\to\mathbf{R}^{+}$, 如果 $\forall x_1,x_2\in\mathbf{I}$ 及 $\forall t\in[0,1]$, 存在 $r\in\mathbf{R}$, 使得

$$f(M_2^{[1]}(t,1-t;x_1,x_2))\leqslant(\geqslant)\overline{M_2^{[r]}}(t^s,(1-t)^s;f(x_1),f(x_2)),\tag{2}$$

则称 $f(x)$ 为 $\mathbf{I}$ 上的 $A\overline{M}(s)$-凸(凹)函数.

注 1 当 $s\in(0,1]$ 且 $r=1,0,-1,2$ 时, 则称 $A\overline{M}(s)$-凸(凹)函数分别为 s-凸(凹)函数、$A\overline{G}(s)$-凸(凹)函数(对数 s-凸(凹)函数)、$A\overline{H}(s)$-凸(凹)函数、$A\overline{R}(s)$-凸(凹)函数.

注 2 当 $s=1$ 且 $r=1,0,-1,2$ 或 $r\in\mathbf{R}$ 时, $A\overline{M}(s)$-凸(凹)函数即分别为凸(凹)函数、AG-凸(凹)函数(对数凸(凹)函数)、AH-凸(凹)函数、AR-凸(凹)函数、AM-凸(凹)函数.

1 关于 $A\overline{M}(s)$-凸函数的判定

设函数 $\tau(x)=x^{-1}$, $\omega(x)=\exp x\,(x\in\mathbf{I}=(0,+\infty))$, 我们记 $\tau(\mathbf{I})=\mathbf{I}^{-1}$, $\omega(\mathbf{I})=\exp\mathbf{I}$. 同时约定, 全文所有讨论只考虑 $r\neq0$ 的情形, 对 $r=0$ 的情形的相关讨论见文献 [19].

定理 1 设 $\mathbf{I}\subseteq\mathbf{R}^{+}, s\in(0,1], f:\mathbf{I}\to\mathbf{R}^{+}$, 则

(i) 当 $r>0$ 时, $f(x)$ 为 $\mathbf{I}$ 上的 $A\overline{M}(s)$-凸(凹)函数的充要条件是 $[f(x)]^r$ 为 $\mathbf{I}$ 上的 s-凸(凹)函数;

(ii)当 $r<0$ 时, $f(x)$ 为 $\mathbf{I}$ 上的 $A\overline{M}(s)$-凸(凹)函数的充要条件是 $[f(x)]^r$ 为 $\mathbf{I}$ 上的 s-凹(凸)函数.

证 明 只证 (i), 同理可证 (ii).

设 $g(x)=[f(x)]^r(x\in\mathbf{I}$ 且 $r>0)$ 或 $f(x)=[g(x)]^{1/r}(x\in\mathbf{I})$.

充分性. 如果 $g(x)=[f(x)]^r$ 为 $\mathbf{I}$ 上的 s-凸函数, 注意到 $r>0$, 那么 $\forall x_1,x_2\in\mathbf{I}$ 及 $\forall t\in[0,1]$, 则由加权 r 次幂 s-平均恒等关系式, 有

$$\begin{aligned}&f(M_2^{[1]}(t,1-t;x_1,x_2))=[g(M_2^{[1]}(t,1-t;x_1,x_2))]^{1/r}\leqslant[\overline{M_2^{[1]}}(t^s,(1-t)^s;g(x_1),g(x_2))]^{1/r}\\=&\overline{M_2^{[r]}}(t^s,(1-t)^s;[g(x_1)]^{1/r},[g(x_2)]^{1/r})=\overline{M_2^{[r]}}(t^s,(1-t)^s;f(x_1),f(x_2)),\end{aligned}$$

所以, 函数 $f(x)$ 是 $\mathbf{I}$ 上的 $A\overline{M}(s)$-凸函数.

必要性. 如果 $f(x)$ 是 $\mathbf{I}$ 上的 $A\overline{M}(s)$-凸函数, $r>0$, 那么 $\forall x_1,x_2\in\mathbf{I}$ 及 $\forall t\in[0,1]$, 由加权 r 次幂 s-平均恒等关系式, 有

$$\begin{aligned}&g(M_2^{[1]}(t,1-t;x_1,x_2))=[f(M_2^{[1]}(t,1-t;x_1,x_2)]^r\leqslant[\overline{M_2^{[r]}}(t^s,(1-t)^s;f(x_1),f(x_2))]^r\\=&\overline{M_2^{[1]}}(t^s,(1-t)^s;[f(x_1)]^r,[f(x_2)]^r)=\overline{M_2^{[1]}}(t^s,(1-t)^s;g(x_1),g(x_2)),\end{aligned}$$

因此, $g(x)=[f(x)]^r$ 是 $\mathbf{I}$ 上的 s-凸函数.

若 $f(x)$ 是 $\mathbf{I}$ 上的 $A\overline{M}(s)$-凹函数, 则证明中的不等号反向, 所以定理 1(i) 的后半部分成立.

定理 2　设 $\mathbf{I}\subseteq\mathbf{R}^+, s\in(0,1], f:\mathbf{I}\to\mathbf{R}^+$, 则

(i) 当 $r>0$ 时, $f(x)$ 为 $\mathbf{I}$ 上的 $A\overline{M}(s)$-凸(凹)函数的充要条件是 $\exp[f(\ln x)]^r$ 为 $\exp\mathbf{I}$ 上的几何 s-凸(凹)函数;

(ii) 当 $r<0$ 时, $f(x)$ 为 $\mathbf{I}$ 上的 $A\overline{M}(s)$-凸(凹)函数的充要条件是 $\exp[f(\ln x)]^r$ 为 $\exp\mathbf{I}$ 上的几何 s-凹(凸)函数.

证　明　仅证 (i), 同样的方法可证明 (ii).

令 $g(x)=\exp[f(\ln x)]^r(x\in\exp\mathbf{I}, r\neq0)$, 则 $f(x)=[\ln g(\exp x)]^{1/r}(x\in\mathbf{I})$.

充分性. $\forall x_1,x_2\in\mathbf{I}$, $\exp x_1,\exp x_2\in\exp\mathbf{I}$, 若 $g(x)=\exp[f(\ln x)]^r$ 是 $\exp\mathbf{I}$ 上的几何 s-凸函数, 且 $r>0$, 则由加权 r 次幂平均恒等关系式和加权 r 次幂 s-平均恒等关系式, 有

$$\begin{aligned}&f(M_2^{[1]}(t,1-t;x_1,x_2))=[\ln g(\exp M_2^{[1]}(t,1-t;x_1,x_2))]^{1/r}\\=&[\ln g(M_2^{[0]}(t,1-t;\exp x_1,\exp x_2))]^{1/r}\leqslant[\ln\overline{M_2^{[0]}}(t^s,(1-t)^s;g(\exp x_1),g(\exp x_2))]^{1/r}\\=&[\overline{M_2^{[1]}}(t^s,(1-t)^s;\ln g(\exp x_1),\ln g(\exp x_2))]^{1/r}\\=&\overline{M_2^{[r]}}(t^s,(1-t)^s;[\ln g(\exp x_1)]^{1/r},[\ln g(\exp x_2)]^{1/r})=\overline{M_2^{[r]}}(t^s,(1-t)^s;f(x_1),f(x_2)),\end{aligned}$$

故 $f(x)$ 为 $\mathbf{I}$ 上的 $A\overline{M}(s)$-凸函数.

必要性. $\forall x_1,x_2\in\exp\mathbf{I}$, $\ln x_1,\ln x_2\in\mathbf{I}$, 若 $f(x)$ 为 $\mathbf{I}$ 上的 $A\overline{M}(s)$-凸函数, 注意到 $r>0$, 则由加权 r 次幂平均恒等关系式和加权 r 次幂 s-平均恒等关系式, 有

$$\begin{aligned}&g(M_2^{[0]}(t,1-t;x_1,x_2))=\exp[f(\ln M_2^{[0]}(t,1-t;x_1,x_2))]^r\\=&\exp[f(M_2^{[1]}(t,1-t;\ln x_1,\ln x_2))]^r\leqslant\exp[\overline{M_2^{[r]}}(t^s,(1-t)^s;f(\ln x_1),f(\ln x_2))]^r\\=&\exp\overline{M_2^{[1]}}(t^s,(1-t)^s;[f(\ln x_1)]^r,[f(\ln x_2)]^r)\\=&\overline{M_2^{[0]}}(t^s,(1-t)^s;\exp[f(\ln x_1)]^r,\exp[f(\ln x_2)]^r)=\overline{M_2^{[0]}}(t^s,(1-t)^s;g(x_1),g(x_2)),\end{aligned}$$

故 $g(x)=\exp[f(\ln x)]^r$ 是 $\exp\mathbf{I}$ 上的几何 s-凸函数.

若 $f(x)$ 是 $\mathbf{I}$ 上的 $A\overline{M}(s)$-凹函数, 且 $r>0$, 则证明中的不等号反向, 所以定理 2(i) 的后半部分成立.

定理 3　设 $\mathbf{I}\subseteq\mathbf{R}^+, s\in(0,1], f:\mathbf{I}\to\mathbf{R}^+$, 则

(i) 当 $r>0$ 时, $f(x)$ 为 $\mathbf{I}$ 上的 $A\overline{M}(s)$-凸(凹)函数的充要条件是 $[f(x^{-1})]^{-r}$ 为 $\mathbf{I}^{-1}$ 上的调和 s-凹(凸)函数;

(ii) 当 $r<0$ 时, $f(x)$ 为 $\mathbf{I}$ 上的 $A\overline{M}(s)$-凸(凹)函数的充要条件是 $[f(x^{-1})]^{-r}$ 为 $\mathbf{I}^{-1}$ 上的调和 s-凸(凹)函数.

证　明　只证 (i), 同理可证 (ii).

设 $g(x)=[f(x^{-1})]^{-r}(x\in\mathbf{I}^{-1}$ 且 $r>0)$, 则 $f(x)=[g(x^{-1})]^{-1/r}\,(x\in\mathbf{I})$.

充分性. 如果 $g(x)=[f(x^{-1})]^{-r}$ 为 $\mathbf{I}^{-1}$ 上的调和 s-凹函数, 注意到 $r>0$, 那么 $\forall x_1,x_2\in\mathbf{I}$ 及 $\forall t\in[0,1]$, 由加权 r 次幂平均恒等关系式和加权 r 次幂 s-平均恒等关系式, 有

$$\begin{aligned}&f(M_2^{[1]}(t,1-t;x_1,x_2))=[g([M_2^{[1]}(t,1-t;x_1,x_2)]^{-1})]^{-1/r}\\=&[g(M_2^{[-1]}(t,1-t;x_1^{-1},x_2^{-1}))]^{-1/r}\leqslant[\overline{M_2^{[-1]}}(t^s,(1-t)^s;g(x_1^{-1}),g(x_2^{-1}))]^{-1/r}\\=&\overline{M_2^{[r]}}(t^s,(1-t)^s;[g(x_1^{-1})]^{-1/r},[g(x_2^{-1})]^{-1/r})=\overline{M_2^{[r]}}(t^s,(1-t)^s;f(x_1),f(x_2)),\end{aligned}$$

所以, 函数 $f(x)$ 是 $\mathbf{I}$ 上的 $A\overline{M}(s)$-凸函数.

必要性. 如果 $f(x)$ 是 $\mathbf{I}$ 上的 $A\overline{M}(s)$-凸函数, $r>0$, 那么 $\forall x_1,x_2\in\mathbf{I}^{-1}$ 及 $\forall t\in[0,1]$, 则由加权 r 次幂平均恒等关系式和加权 r 次幂 s-平均恒等关系式, 有

$$\begin{aligned}&g(M_n^{[-1]}(t,1-t;x_1,x_2))=[f([M_n^{[-1]}(t,1-t;x_1,x_2)]^{-1}]^{-r}=[f(M_2^{[1]}(t,1-t;x_1^{-1},x_2^{-1}))]^{-r}\\\geqslant&[(\overline{M_2^{[r]}}(t^s,(1-t)^s;f(x_1^{-1}),f(x_2^{-1}))]^{-r}=\overline{M_2^{[-1]}}(t^s,(1-t)^s;[f(x_1^{-1})]^{-r},[f(x_2^{-1})]^{-r})\\=&\overline{M_2^{[-1]}}(t^s,(1-t)^s;g(x_1),g(x_2)),\end{aligned}$$

因此, $g(x)=[f(x^{-1})]^{-r}$ 是 $\mathbf{I}^{-1}$ 上的调和 s-凹函数.

若 $f(x)$ 是 $\mathbf{I}$ 上的 $A\overline{M}(s)$-凹函数, 且 $r>0$, 则证明中的不等号反向, 所以定理 3(i) 的后半部分成立.

定理 4　设 $\mathbf{I}\subseteq\mathbf{R}^+,s\in(0,1],f:\mathbf{I}\to\mathbf{R}^+$, 则

(i) 当 $r>0$ 时, $f(x)$ 为 $\mathbf{I}$ 上的 $A\overline{M}(s)$-凸(凹)函数的充要条件是 $\forall x_1,x_2,x_3\in\mathbf{I}$ 且 $x_1<x_2<x_3$, 有

$$(x_3-x_2)^s[f(x_1)]^r-(x_3-x_1)^s[f(x_2)]^r+(x_2-x_1)^s[f(x_3)]^r\geqslant(\leqslant)\ 0;$$

(ii) 当 $r<0$ 时, $f(x)$ 为 $\mathbf{I}$ 上的 $A\overline{M}(s)$-凸(凹)函数的充要条件是: $\forall x_1,x_2,x_3\in\mathbf{I}$ 且 $x_1<x_2<x_3$, 有

$$(x_3-x_2)^s[f(x_1)]^r-(x_3-x_1)^s[f(x_2)]^r+(x_2-x_1)^s[f(x_3)]^r\leqslant(\geqslant)\ 0.$$

证　明　只证 (i), 同理可证 (ii).

必要性. $\forall x_1,x_2,x_3\in\mathbf{I}$ 且 $x_1<x_2<x_3$, 令 $\lambda=\frac{x_3-x_2}{x_3-x_1}$, 则 $x_2=M_2^{[1]}(\lambda,1-\lambda;x_1,x_3)$, 若 $f(x)$ 为 $\mathbf{I}$ 上的 $A\overline{M}(s)$-凸函数, 且 $r>0$, 则

$$\begin{aligned}&f(x_2)=f(M_2^{[1]}(\lambda,1-\lambda;x_1,x_3))\leqslant\overline{M_2^{[r]}}(\lambda^s,(1-\lambda)^s;f(x_1),f(x_3))\\=&[\lambda^s(f(x_1))^r+(1-\lambda)^s(f(x_3))^r]^{1/r}=\left[\left(\frac{x_3-x_2}{x_3-x_1}\right)^s(f(x_1))^r+\left(\frac{x_2-x_1}{x_3-x_1}\right)^s(f(x_3))^r\right]^{1/r},\end{aligned}$$

因为 $f(x)$ 是 $\mathbf{I}$ 上的正值函数, 且 $s\in(0,1],r>0$, 所以, 将上式两边同时 r 次方后再整理得

$$(x_3-x_2)^s[f(x_1)]^r-(x_3-x_1)^s[f(x_2)]^r+(x_2-x_1)^s[f(x_3)]^r\geqslant0.$$

由于 $r>0$ 时, 以上证明步步可逆, 所以充分性成立.

如果 $f(x)$ 是 $\mathbf{I}$ 上的 $A\overline{M}(s)$-凹函数, 且 $s\in(0,1], r>0$, 则以上证明过程中的不等号反向, 因此定理 4(i) 的后半部分成立.

定理 5　设 $\mathbf{I}\subseteq\mathbf{R}^{+}, s\in(0,1], f:\mathbf{I}\to\mathbf{R}^{+}$, 则

(i) 当 $r>0$ 时, $f(x)(x\in\mathbf{I})$ 为 $A\overline{M}(s)$-凸(凹)函数的充要条件是: $\phi(t)=[f(M_2^{[1]}(t,1-t;x_1,x_2))]^r(\forall x_1,x_2\in\mathbf{I})$ 是 $[0,1]$ 上的 s-凸(凹)函数;

(ii) 当 $r<0$ 时, $f(x)(x\in\mathbf{I})$ 为 $A\overline{M}(s)$-凸(凹)函数的充要条件是: $\phi(t)=[f(M_2^{[1]}(t,1-t;x_1,x_2))]^r(\forall x_1,x_2\in\mathbf{I})$ 是 $[0,1]$ 上的 s-凹(凸)函数.

证　明　只证 (i), 同理可证 (ii).

充分性. 因为 $\phi(t)=[f(M_2^{[1]}(t,1-t;x_1,x_2))]^r(t\in[0,1])$, 所以 $\phi(0)=[f(x_2)]^r$, $\phi(1)=[f(x_1)]^r$, 又 $\phi(t)$ 为 $[0,1]$ 上的 s-凸函数, 且 $r>0$, 所以, 由加权 r 次幂平均恒等关系式和加权 r 次幂 s-平均恒等关系式, 有

$$
\begin{aligned}
&f(M_2^{[1]}(t,1-t;x_1,x_2))=[\phi(t)]^{1/r}=[\phi(M_2^{[1]}(t,1-t;1,0))]^{1/r}\\
\leqslant&[\overline{M_2^{[1]}}(t^s,(1-t)^s;\phi(1),\phi(0))]^{1/r}=[\overline{M_2^{[1]}}(t^s,(1-t)^s;[f(x_1)]^r,[f(x_2)]^r)]^{1/r}\\
=&\overline{M_2^{[r]}}(t^s,(1-t)^s;f(x_1),f(x_2)),
\end{aligned}
$$

因此, 函数 $f(x)$ 为 $\mathbf{I}$ 上的 $A\overline{M}(s)$-凸函数.

必要性. $\forall x_1,x_2\in\mathbf{I}$ 及 $\forall t_1,t_2\in[0,1]$, 由幂平均的性质[20], 知 $M_2^{[1]}(t_1,1-t_1;x_1,x_2)\in[\min\{x_1,x_2\},\max\{x_1,x_2\}]\subseteq\mathbf{I}, M_2^{[1]}(t_2,1-t_2;x_1,x_2)\in[\min\{x_1,x_2\},\max\{x_1,x_2\}]\subseteq\mathbf{I}$, 令 $X_1=M_2^{[1]}(t_1,1-t_1;x_1,x_2)$, $X_2=M_2^{[1]}(t_2,1-t_2;x_1,x_2)$, 则 $\forall\alpha\in[0,1]$, 同样有, $M_2^{[1]}(\alpha,1-\alpha;X_1,X_2)\in\mathbf{I}$.

若 $f(x)$ 是 $\mathbf{I}$ 上的 $A\overline{M}(s)$-凸函数, 且 $r>0$, 则 $\forall t_1,t_2\in[0,1]$ 及 $\forall\alpha\in[0,1]$, 由加权 r 次幂平均恒等关系式和加权 r 次幂 s-平均恒等关系式, 有

$$
\begin{aligned}
&\phi(M_2^{[1]}(\alpha,1-\alpha;t_1,t_2))=[f(M_2^{[1]}(M_2^{[1]}(\alpha,1-\alpha;t_1,t_2),1-M_2^{[1]}(\alpha,1-\alpha;t_1,t_2);x_1,x_2))]^r\\
=&[f(M_2^{[1]}(\alpha,1-\alpha;M_2^{[1]}(t_1,1-t_1;x_1,x_2),M_2^{[1]}(t_2,1-t_2;x_1,x_2)))]^r\\
\leqslant&[\overline{M_2^{[r]}}(\alpha^s,(1-\alpha)^s;f(M_2^{[1]}(t_1,1-t_1;x_1,x_2)),f(M_2^{[1]}(t_2,1-t_2;x_1,x_2))]^r\\
=&\overline{M_2^{[1]}}(\alpha^s,(1-\alpha)^s;[f(M_2^{[1]}(t_1,1-t_1;x_1,x_2))]^r,[f(M_2^{[1]}(t_2,1-t_2;x_1,x_2)]^r)\\
=&\overline{M_2^{[1]}}(\alpha^s,(1-\alpha)^s;\phi(t_1),\phi(t_2)),
\end{aligned}
$$

所以, 当 $r>0$ 时, 函数 $\phi(t)=[f(M_2^{[1]}(t,1-t;x_1,x_2))]^r(\forall x_1,x_2\in\mathbf{I})$ 是 $[0,1]$ 上的 s-凸函数.

如果 $f(x)$ 是 $\mathbf{I}$ 上的 $A\overline{M}(s)$-凹函数, 且 $r>0$, 则上述证明中的不等号反向, 因此定理 5(i) 的后半部分成立.

定理 6　设 $\mathbf{I}\subseteq\mathbf{R}^{+}, s\in(0,1], f:\mathbf{I}\to\mathbf{R}^{+}$, 且二阶可导, 则

(i) 当 $r>0$ 时, 若 $\forall x\in\mathbf{I}$ 有 $(r-1)(f'(x))^2+f(x)f''(x)\geqslant0$, 则 $f(x)$ 是 $\mathbf{I}$ 上的 $A\overline{M}(s)$-凸函数. 若 $f(x)$ 为 $\mathbf{I}$ 上的 $A\overline{M}(s)$-凹函数, 则 $\forall x\in\mathbf{I}$ 有 $(r-1)(f'(x))^2+f(x)f''(x)\leqslant0$.

(ii) 当 $r<0$ 时, 若 $\forall x\in\mathbf{I}$ 有 $(r-1)(f'(x))^2+f(x)f''(x)\geqslant0$, 则 $f(x)$ 是 $\mathbf{I}$ 上的 $A\overline{M}(s)$-凹函数. 若 $f(x)$ 为 $\mathbf{I}$ 上的 $A\overline{M}(s)$-凸函数, $\forall x\in\mathbf{I}$ 有 $(r-1)(f'(x))^2+f(x)f''(x)\leqslant0$.

证　明　只证 (i), 同理可证 (ii).

$\forall t \in [0,1]$ 及 $s \in (0,1]$, 则 $0 \leqslant t \leqslant t^s \leqslant 1$. 而 $\forall x_1, x_2 \in \mathbf{I}, f(x_1), f(x_2) > 0$, 因此, 有 $t(f(x_1))^r \leqslant t^s(f(x_1))^r$, 同理, $(1-t)(f(x_2))^r \leqslant (1-t)^s(f(x_2))^r$, 所以, 有 $t(f(x_1))^r + (1-t)(f(x_2))^r \leqslant t^s(f(x_1))^r + (1-t)^s(f(x_2))^r$, 于是有 $M_2^{[1]}(t, 1-t; (f(x_1))^r, (f(x_2))^r) \leqslant \overline{M_2^{[1]}}(t^s, (1-t)^s; (f(x_1))^r, (f(x_2))^r)$. 注意到 $r > 0$, 则

$$[M_2^{[1]}(t, 1-t; (f(x_1))^r, (f(x_2))^r)]^{1/r} \leqslant [\overline{M_2^{[1]}}(t^s, (1-t)^s; (f(x_1))^r, (f(x_2))^r)]^{1/r},$$

即 $M_2^{[r]}(t, 1-t; f(x_1), f(x_2)) \leqslant \overline{M_2^{[r]}}(t^s, (1-t)^s; f(x_1), f(x_2))$, 因此, 当 $r > 0$ 时, 若 $(r-1)(f'(x))^2 + f(x)f''(x) \geqslant 0 (x \in \mathbf{I}) \Leftrightarrow f(x)$ 是 $\mathbf{I}$ 上的 AM-凸函数, 所以有

$$f(M_2^{[1]}(t, 1-t; x_1, x_2)) \leqslant M_2^{[r]}(t, 1-t; f(x_1), f(x_2)) \leqslant \overline{M_2^{[r]}}(t^s, (1-t)^s; f(x_1), f(x_2)),$$

从而 $f(x)$ 是 $\mathbf{I}$ 上的 $A\overline{M}(s)$-凸函数.

若 $f(x)$ 为 $\mathbf{I}$ 上的 $A\overline{M}(s)$-凹函数, 则

$$f(M_2^{[1]}(t, 1-t; x_1, x_2)) \geqslant \overline{M_2^{[r]}}(t^s, (1-t)^s; f(x_1), f(x_2)) \geqslant M_2^{[r]}(t, 1-t; f(x_1), f(x_2)),$$

从而 $f(x)$ 是 $\mathbf{I}$ 上的 AM-凹函数 $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbf{I}$ 有 $(r-1)(f'(x))^2 + f(x)f''(x) \leqslant 0\ (r > 0)$.

2 关于AM(s)-凸函数的性质

定理 7 设 $\mathbf{A}, \mathbf{I} \subseteq \mathbf{R}^+, s \in (0,1], f: \mathbf{I} \to \mathbf{R}^+, \mu: \mathbf{A} \to \mathbf{B} \subseteq \mathbf{I}$, 则

(i) 若 $y = f(u)$ 是 $\mathbf{I}$ 上严格递增的 $A\overline{M}(s)$-凸函数, $u = \mu(x)$ 是 $\mathbf{A}$ 上的凸函数, 则 $y = f(\mu(x))$ 是 $\mathbf{A}$ 上的 $A\overline{M}(s)$-凸函数;

(ii) 若 $y = f(u)$ 是 $\mathbf{I}$ 上严格递减的 $A\overline{M}(s)$-凸函数, $u = \mu(x)$ 为 $\mathbf{A}$ 上的凹函数, 则 $y = f(\mu(x))$ 是 $\mathbf{A}$ 上的 $A\overline{M}(s)$-凸函数;

(iii) 若 $y = f(u)$ 是 $\mathbf{I}$ 上严格递增的 $A\overline{M}(s)$-凹函数, $u = \mu(x)$ 为 $\mathbf{A}$ 上的凹函数, 则 $y = f(\mu(x))$ 是 $\mathbf{A}$ 上的 $A\overline{M}(s)$-凹函数;

(iv) 若 $y = f(u)$ 是 $\mathbf{I}$ 上严格递减的 $A\overline{M}(s)$-凹函数, $u = \mu(x)$ 为 $\mathbf{A}$ 上的凸函数, 则 $y = f(\mu(x))$ 是 $\mathbf{A}$ 上的 $A\overline{M}(s)$-凹函数.

证　明 只证 (i), 同理可证 (ii)、(iii)、(iv).

$\forall x_1, x_2 \in \mathbf{A}$ 及 $\forall t \in [0,1]$, 有 $M_2^{[1]}(t, 1-t; x_1, x_2) \in \mathbf{A}$, 由条件知, $\mu(x_1), \mu(x_2), \mu(M_2^{[1]}(t, 1-t; x_1, x_2)) \in \mathbf{B} \subseteq \mathbf{I}$, 且 $M_2^{[1]}(t, 1-t; \mu(x_1), \mu(x_2)) \in \mathbf{B} \subseteq \mathbf{I}$, 因为 $u = \mu(x)$ 为 $\mathbf{A}$ 上的凸函数, 且 $y = f(u)$ 是 $\mathbf{I}$ 上严格递增的 $A\overline{M}(s)$-凸函数, 所以

$$\begin{aligned} & f(\mu(M_2^{[1]}(t, 1-t; x_1, x_2))) \leqslant f(M_2^{[1]}(t, 1-t; \mu(x_1), \mu(x_2))) \\ \leqslant & \overline{M_2^{[r]}}(t^s, (1-t)^s; f(\mu(x_1)), f(\mu(x_2))), \end{aligned}$$

故, 函数 $y = f(\mu(x))$ 为 $\mathbf{A}$ 上的 $A\overline{M}(s)$-凸函数.

类似地, 可以证明下列结果.

定理 8 设 $\mathbf{A}, \mathbf{I} \subseteq \mathbf{R}^+, s \in (0,1], f: \mathbf{I} \to \mathbf{R}^+, \mu: \mathbf{A} \to \mathbf{B} \subseteq \mathbf{I}$, 则

(i) 若 $y = f(u)$ 是 $\mathbf{I}$ 上严格递增的 r 次幂平均 s-凸函数, $u = \mu(x)$ 是 $\mathbf{A}$ 上的 AM-凸函数, 则 $y = f(\mu(x))$ 是 $\mathbf{A}$ 上的 $A\overline{M}(s)$-凸函数;

(ii) 若 $y = f(u)$ 是 $\mathbf{I}$ 上严格递减的 r 次幂平均 s-凸函数, $u = \mu(x)$ 为 $\mathbf{A}$ 上的 AM-凹函数, 则 $y = f(\mu(x))$ 是 $\mathbf{A}$ 上的 $A\overline{M}(s)$-凸函数;

(iii) 若 $y=f(u)$ 是 $\mathbf{I}$ 上严格递增的 r 次幂平均 s-凹函数, $u=\mu(x)$ 为 $\mathbf{A}$ 上的 AM-凹函数, 则 $y=f(\mu(x))$ 是 $\mathbf{A}$ 上的 $A\overline{M}(s)$-凹函数;

(iv) 若 $y=f(u)$ 是 $\mathbf{I}$ 上严格递减的 r 次幂平均 s-凹函数, $u=\mu(x)$ 为 $\mathbf{A}$ 上的 AM-凸函数, 则 $y=f(\mu(x))$ 是 $\mathbf{A}$ 上的 $A\overline{M}(s)$-凹函数.

3 $A\overline{M}(s)$-凸函数的 Jensen 型不等式

定理 9 设 $\mathbf{I}\subseteq\mathbf{R}^+, s\in(0,1], f:\mathbf{I}\to\mathbf{R}^+, r\in\mathbf{R}, r\neq 0$, 若 $f(x)$ 为 $\mathbf{I}$ 上的 $A\overline{M}(s)$-凸函数, 那么 $\forall x_i\in\mathbf{I}$ 及 $\forall t_i\in[0,1](i=1,2,\cdots,n)$, 且 $\sum\limits_{i=1}^{n}t_i=1$, 都有

$$f(M_n^{[1]}(t_1,t_2,\cdots,t_n;x_1,x_2,\cdots,x_n))\leqslant\overline{M_n^{[r]}}(t_1^s,t_2^s,\cdots,t_n^s;f(x_1),f(x_2),\cdots,f(x_n)).\qquad(3)$$

若 $f(x)$ 为 $\mathbf{I}$ 上的 $A\overline{M}(s)$-凹函数, 则不等式 (3) 中的不等号反向.

证 明(用数学归纳法). 先证 $r>0$ 的情形. 设 $f(x)$ 为 $\mathbf{I}$ 上的 $A\overline{M}(s)$-凸函数.

当 $n=1$ 时, $t_1=1$, 此时式 (3) 为恒等式, 所以定理成立.

当 $n=2$ 时, $\forall x_1,x_2\in\mathbf{I}$ 及 $\forall t_1,t_2\in[0,1]$, 且 $t_1+t_2=1$, 由 $A\overline{M}(s)$-凸函数的定义 2, 有

$$\begin{aligned}&f(M_2^{[1]}(t_1,t_2;x_1,x_2))=f(M_2^{[1]}(t_1,1-t_1;x_1,x_2))\\ \leqslant&\overline{M_2^{[r]}}(t_1^s,(1-t_1)^s;f(x_1),f(x_2))=\overline{M_2^{[r]}}(t_1^s,t_2^s;f(x_1),f(x_2)),\end{aligned}$$

所以, 当 $n=2$ 时定理成立.

假设 $n=k$ 时定理成立, 即 $\forall x_i\in\mathbf{I}$, $\forall t_i\in[0,1](i=1,2,\cdots,k)$, 且 $\sum\limits_{i=1}^{k}t_i=1$, 有

$$f(M_k^{[1]}(t_1,t_2,\cdots,t_k;x_1,x_2,\cdots,x_k))\leqslant\overline{M_k^{[r]}}(t_1^s,t_2^s,\cdots,t_k^s;f(x_1),f(x_2),\cdots,f(x_k)).$$

则当 $n=k+1$ 时, $\forall x_i\in\mathbf{I},\forall t_i\in[0,1](i=1,2,\cdots,k,k+1)$, 且 $\sum\limits_{i=1}^{k+1}t_i=1$, 并注意到 $\frac{t_1}{t_1+t_1+\cdots+t_k}x_1+\frac{t_2}{t_1+t_2+\cdots+t_k}x_2+\cdots+\frac{t_k}{t_1+t_2+\cdots+t_k}x_k=M_k^{[1]}(\frac{t_1}{t_1+t_2+\cdots+t_k},\frac{t_2}{t_1+t_2+\cdots+t_k},\cdots,\frac{t_k}{t_1+t_2+\cdots+t_k};x_1,x_2,\cdots,x_k)\in\mathbf{I}$ 以及 $r>0$, 根据 $A\overline{M}(s)$-凸函数的定义和假设, 由加权 r 次幂平均恒等关系式和加权 r 次幂 s-平均恒等关系式, 有

$$\begin{aligned}&f(M_{k+1}^{[1]}(t_1,t_2,\cdots,t_{k+1};x_1,x_2,\cdots,x_{k+1}))\\ =&f\Big((t_1+t_2+\cdots+t_k)M_k^{[1]}\Big(\frac{t_1}{t_1+t_2\cdots+t_k},\frac{t_2}{t_1+t_2\cdots+t_k}\cdots,\frac{t_k}{t_1+t_2\cdots+t_k};\\ &x_1,x_2,\cdots,x_k\Big)+t_{k+1}x_{k+1}\Big)\\ =&f\Big(M_2^{[1]}\Big(t_1+t_2+\cdots+t_k,t_{k+1};M_k^{[1]}\Big(\frac{t_1}{t_1+t_2\cdots+t_k},\frac{t_2}{t_1+t_2\cdots+t_k}\cdots,\frac{t_k}{t_1+t_2\cdots+t_k};\\ &x_1,x_2,\cdots,x_k\Big),x_{k+1}\Big)\Big)\\ \leqslant&\overline{M_2^{[r]}}\Big((t_1+t_2+\cdots+t_k)^s,t_{k+1}^s;f\Big(M_k^{[1]}\Big(\frac{t_1}{t_1+t_2\cdots+t_k},\frac{t_2}{t_1+t_2\cdots+t_k}\cdots,\frac{t_k}{t_1+t_2\cdots+t_k};\\ &x_1,x_2,\cdots,x_k\Big)\Big),f(x_{k+1})\Big)\end{aligned}$$

$$=\Big[(t_1+t_2+\cdots+t_k)^s\Big(f\Big(M_k^{[1]}\Big(\frac{t_1}{t_1+t_2\cdots+t_k},\frac{t_2}{t_1+t_2\cdots+t_k}\cdots,\frac{t_k}{t_1+t_2\cdots+t_k};$$

$$x_1,x_2,\cdots,x_k\Big)\Big)\Big)^r+t_{k+1}^s(f(x_{k+1}))^r\Big]^{1/r}$$

$$\leqslant\Big[(t_1+t_2+\cdots+t_k)^s\Big(\overline{M_k^{[r]}}\Big(\Big(\frac{t_1}{t_1+t_2+\cdots+t_k}\Big)^s,\Big(\frac{t_2}{t_1+t_2+\cdots+t_k}\Big)^s,\cdots,\Big(\frac{t_k}{t_1+t_2+\cdots+t_k}\Big)^s;$$

$$f(x_1),f(x_2),\cdots,f(x_k)\Big)\Big)^r+t_{k+1}^s(f(x_{k+1}))^r\Big]^{1/r}$$

$$=\overline{M_2^{[r]}}(t_1^s,t_2^s,\cdots,t_{k+1}^s;f(x_1),f(x_2),\cdots,f(x_{k+1})),$$

即, 当 $n=k+1$ 时, 不等式 (3) 成立. 故对于一切自然数 n, 若 $f(x)$ 为 $\mathbf{I}$ 上的 $A\overline{M}(s)$-凸函数, 则不等式 (3) 成立.

若 $r<0$ 时, 同理可证不等式 (3) 仍然成立. 故定理的前半部分成立.

同样的方法可证明: 若 $f(x)$ 为 $\mathbf{I}$ 上的 $A\overline{M}(s)$-凹函数, 则不等式 (3) 中的不等号反向, 所以定理的后半部分成立.

关于定理 9, 它的一个等价形式如下.

定理 10 设 $\mathbf{I}\subseteq\mathbf{R}^+, s\in(0,1], f:\mathbf{I}\to\mathbf{R}^+, r\in\mathbf{R}, r\neq 0$, 且 $\forall x_i\in\mathbf{I},\forall q_i\in\mathbf{R}^+(i=1,2,\cdots,n)$, 若 $f(x)$ 为 $\mathbf{I}$ 上的 $A\overline{M}(s)$-凸(凹)函数, 则

$$f\Big(M_n^{[1]}\Big(\frac{q_1}{q_1+q_2+\cdots+q_n},\frac{q_2}{q_1+q_2+\cdots+q_n},\cdots,\frac{q_n}{q_1+q_2+\cdots+q_n};x_1x_2,\cdots,x_n\Big)\Big)$$

$$\leqslant(\geqslant)\overline{M_n^{[r]}}\Big(\Big(\frac{q_1}{q_1+q_2+\cdots+q_n}\Big)^s,\Big(\frac{q_2}{q_1+q_2+\cdots+q_n}\Big)^s,\cdots,\Big(\frac{q_n}{q_1+q_2+\cdots+q_n}\Big)^s;$$

$$f(x_1),f(x_2),\cdots,f(x_n)\Big).$$

特别地, 如果 $q_1=q_2=\cdots=q_n$, 则有

推　论 设 $\mathbf{I}\subseteq\mathbf{R}^+, s\in(0,1], f:\mathbf{I}\to\mathbf{R}^+, r\in\mathbf{R}, r\neq0$, 且 $\forall x_i\in\mathbf{I}$ $(i=1,2,\cdots,n)$, 若 $f(x)$ 为 $\mathbf{I}$ 上的 $A\overline{M}(s)$-凸(凹)函数, 则

$$f\Big(M_n^{[1]}\Big(\frac{1}{n},\frac{1}{n},\cdots,\frac{1}{n};x_1,x_2,\cdots,x_n\Big)\Big)\leqslant(\geqslant)\overline{M_n^{[r]}}\Big(\Big(\frac{1}{n}\Big)^s,\Big(\frac{1}{n}\Big)^s,\cdots,\Big(\frac{1}{n}\Big)^s;$$

$$f(x_1),f(x_2),\cdots,f(x_n)\Big).$$

[参 考 文 献]

[1] 宋振云, 陈少元, 胡付高. r 次幂平均 s-凸函数及其 Jensen 型不等式 [J]. 东北师大学报(自然科学版), 2016, 48(4): 15-19.

[2] HUDZIK H, MALIGRAND L. Some remarks on s-convex functions [J]. Aequationes Math, 1994, 48: 100-111.

[3] 宋振云. 几何 s-凸函数及其性质 [J]. 山西师范大学报(自然科学版), 2016, 30(1): 1-5.

[4] 宋振云. 平方 s-凸函数及其性质 [J]. 首都师范大学学报(自然科学版), 2017, 38(1): 9-13.

[5] 宋振云. 调和平方 s-凸函数及其 Jensen 型不等式 [J]. 数学的实践与认识, 2016, 46(3): 279-284.

[6] 张小明. 几何凸函数 [M]. 合肥: 安徽大学出版社, 2004: 6-18.

[7] 吴善和. 几何凸函数与琴生型不等式 [J]. 数学的实践与认识, 2004 34(2): 155-163.

[8] 吴善和. 调和凸函数与琴生型不等式 [J]. 四川师范大学学报(自然科学版), 2004, 27(4): 382-386.

[9] 吴善和. 平方凸函数与琴生型不等式 [J]. 首都师范大学学报(自然科学版), 2005, 26(1): 16-21.

[10] 宋振云, 陈少元. 调和平方凸函数及其 Jensen 型不等式 [J]. 首都师范大学学报(自然科学版), 2015, 36(3): 7-14.

[11] 吴善和. rP-凸函数与琴生型不等式 [J]. 数学的实践与认识, 2005, 35(3): 220-228.

(下转第 120 页)

6 结　论

在实际Web应用中, 一个功能完备的权限管理模块是保障软件系统中数据与服务安全的基础, 并且其他上层业务需求也需要基于该模块来设计实现. 本文根据华东师范大学研究生院管理中的实际需求, 并结合目前比较流行的Spring Security框架, 设计实现了一个针对该校研究生院管理平台的权限管理模块. 本文详细阐述了权限模块的访问域模型, 并基于该模型实现了一种多层级、可配置、高性能的权限拦截器. 最后还针对在实际使用过程中出现的效率问题进行了优化. 经过实际测试证明, 本文设计并实现的权限管理模块具有较高的验证效率, 能够满足研究生院信息平台的实际使用需求.

[参　考　文　献]

[1] 吴波, 王晶. 基于基本RBAC模型的权限管理框架的设计与实现 [J]. 计算机系统应用, 2011(4): 50-54.

[2] 贾青梅, 杨正球. 统一权限管理模块的设计与实现 [C]//2009 通信理论与技术新发展——第十四届全国青年通信学术会议论文集 [C]. 中国通信学会青年工作委员会, 2009: 233-237.

[3] ZHAO F, WANG L, TIAN X. Design and implementation of authorization management system based on RBAC [J]. Computer & Digital Engineering, 2012, 532/533(43): 586-590.

[4] 桂艳峰, 林作铨. 一个基于角色的Web安全访问控制系统 [J]. 计算机研究与发展, 2003, 8: 1186-1194.

[5] 顾春华, 肖宝亮. RBAC 模型层次关系中的角色权限 [J]. 华东理工大学学报 (自然科学版), 2007(1): 96-99.

[6] 杨柳, 危韧勇, 陈传波. 一种扩展型基于角色权限管理模型 (E-RBAC) 的研究 [J]. 计算机工程与科学, 2006, 9: 126-128.

[7] 桂艳峰, 林作铨. 一个基于角色的Web安全访问控制系统 [J]. 计算机研究与发展, 2003, 8: 1186-1194.

[8] NI P, LIAO J, WANG C, et al. Web information recommendation based on user behaviors [C]//Computer Science and Information Engineering, 2009 WRI World Congress on. IEEE Xplore, 2009: 426-430.

[9] ZHANG Y, JOSHI J B D. Role Based Access Control [M]. New York: Springer, 2009.

(责任编辑: 李　艺)

(上接第 54 页)

[12] 席博彦, 包图雅. 关于r-平均凸函数的一些性质 [J]. 数学的实践与认识, 2008, 38(12): 113-119.

[13] GILL P M, PEARCE C E M, PECARIC J. Hadamard's inequality for r-convex functions [J]. Math Aanl Appl, 1997, 215(2): 461-470.

[14] 张孔生, 刘敏. P 方凸函数及其 Jensen 型和 Rado 型不等式 [J]. 阜阳师范学院学报(自然科学版), 2005, 22(2): 18-20.

[15] 吴善和. 对数凸函数与琴生型不等式 [J]. 高等数学研究, 2004, 7(5): 61-64.

[16] 陈少元. AH-凸函数及其应用 [J]. 湖北职业技术学院学报, 2013, 16(2): 106-109.

[17] 宋振云. AR-数及其 Jensen 型不等式 [J]. 安徽师范大学学报(自然科学版), 2015, 38(4): 331-336.

[18] 宋振云. AM-凸函数及其 Jensen 型不等式 [J]. 淮北师范大学学报(自然科学版), 2015, 36(1): 1-7.

[19] XI B Y, QI F. Some integral inequalities of Hermite-Hadamard type for s-logarithmically convex functions [J]. Acta Mathematica Scientia, 2015, 35(3): 515-524.

[20] 匡继昌. 常用不等式 [M]. 4 版. 济南: 山东科学技术出版社, 2010: 53-63.

(责任编辑: 林　磊)