

文章编号: 1000-5641(2018)04-0129-09

一类典型二阶非线性微分方程的近似解析解研究

楼智美¹, 王元斌², 王 鹏³

(1. 绍兴文理学院 物理系, 浙江 绍兴 312000;

2. 绍兴文理学院 数学系, 浙江 绍兴 312000;

3. 济南大学 土建学院, 济南 250022)

摘要: 在非惯性转动参照系中研究力学体系的运动, 常常会出现一类分子分母都含非线性项的二阶非线性微分方程, 很难求得近似解. 用 Adomian 分解法研究了这类典型二阶非线性微分方程的近似解, 在给定的初始条件和参数下得到了近似解的解析表达式, 并作出了近似解析解的解曲线; 与直接用 Mathematica 软件得到的数值解曲线和用同伦渐近法得到的近似解析解曲线进行了比较, 结果表明, 在第一个 $1/4$ 周期时间内, 用 Adomian 分解法得到的近似解曲线与直接用 Mathematica 软件得到的数值解曲线十分吻合, 并且其误差比用同伦渐近法得到的解曲线更小.

关键词: Adomian 分解法; 二阶非线性微分方程; 近似解析解; 数值解

中图分类号: O316 **文献标志码:** A **DOI:** 10.3969/j.issn.1000-5641.2018.04.013

A study of approximate analytical solutions of a kind of typical second-order nonlinear different equation

LOU Zhi-mei¹, WANG Yuan-bin², WANG Peng³

(1. Department of Physics, Shaoxing University, Shaoxing Zhejiang 312000, China;

2. Department of Mathematics, Shaoxing University, Shaoxing Zhejiang 312000, China;

3. School of Civil Engineering and Architecture, University of Jinan, Jinan 250022, China)

Abstract: In a non-inertial rotational reference frame, the motion of a system can be governed by a kind of second-order nonlinear differential equation, in which the numerator and denominator both contain nonlinear terms; in this context, it is hard to obtain an approximate solution for this strongly nonlinear equation. In this paper, we study the approximate solution of the second-order nonlinear differential equation by the Adomian decomposition method. Comparisons between the approximate solution and the numerical solution by using two other methods are also made. The results show that, in the first quarter period, the approximate solutions obtained by the Adomian decomposition method is in good agreement with the numerical solutions and the error of the approximate solutions are smaller than the other solutions obtained by the homotopy asymptotic method.

收稿日期: 2017-07-26

基金项目: 国家自然科学基金(11472177, 11772141)

第一作者: 楼智美, 女, 教授, 主要从事分析力学研究. E-mail: louzhimei@usx.edu.cn.

Keywords: Adomian decomposition method; second order nonlinear differential equation; approximate analytical solution; numerical solution

0 引言

在非惯性转动参照系中研究力学体系的运动, 常常会遇到一类分子分母均含非线性项的二阶非线性微分方程^[1], 此类方程可以通过 Mathematica 软件直接得到它的数值解, 但无法得到其近似解析解. 文献 [2] 用同伦渐近法得到了三阶近似周期解, 但求解过程过于繁复, 求解思路比较抽象. Adomian 分解法是求解非线性微分方程的一有效方法, 已广泛应用于求非线性常微分方程、非线性偏微分方程的近似解析解中, 并取得了一系列的成果^[3-17]. 此方法的主要思路是先将非线性微分方程分解成线性最高阶常微分部分、一般的线性部分、非线性部分和非齐次部分, 把非线性微分方程的解也分解成无穷个解分量, 然后利用 Adomian 多项式和逆算符的性质, 由低阶解分量递推求得高阶解分量, 最后将全部解分量相加得到非线性微分方程的近似解析解. 用 Adomian 分解法求非线性微分方程近似解的关键和难点在于求得与非线性项相对应的 Adomian 多项式, 对于分母不含非线性项的情况比较容易求得其 Adomian 多项式, 但对于分子分母中都含有非线性项的情况, 其相应的 Adomian 多项式较难求. 本文首先给出用 Adomian 分解法求二阶非线性微分方程近似解的基本步骤. 其次, 通过研究在非惯性转动参照系中力学体系的运动, 建立一类分子分母均含非线性项的二阶非线性微分方程. 第三, 计算与二阶非线性微分方程的非线性项相应的前 5 项 Adomian 多项式. 第四, 得到在给定初始条件和参数下的近似解析解, 并与直接用 Mathematica 软件作出的解曲线以及同伦渐近法^[2]所得解曲线进行比较. 结果表明, 在第一个 1/4 周期时间内, 近似解的解曲线与直接用 Mathematica 软件作出的数值解解曲线十分吻合, 并且其误差比由文献 [2] 所得的解曲线更小; 但当时间较长时, 由 Adomian 分解法得到的解曲线与其他方法得到的解曲线出现了较明显的偏差, 主要原因是由于 Adomian 分解法要在 $n \rightarrow \infty$ 时其解才会接近数值解, 而本文只取了前面 5 项. 另外, 本文对取 3 项、4 项、5 项截断的解曲线进行了分析, 发现 5 项截断的解曲线比 3 项、4 项截断的解曲线更接近数值解解曲线.

1 Adomian 分解法的基本理论

Adomian 分解法是求解非线性微分方程的一有效方法^[3], 其基本的思路是, 设非线性微分方程可表示成

$$Lx + Nx + Rx = g(t), \quad (1)$$

且有初始条件

$$x_0 = \alpha, \quad \dot{x}_0 = \beta, \quad (2)$$

这里 α, β 是实数, L 代表方程中最高阶求导的线性可逆算符, R 是其余线性算符, N 是作用在独立变量 x 及其高阶导数上的非线性算符, $g(t)$ 是方程的非齐次部分. 对于二阶非线性微分方程, $L = \frac{d^2}{dt^2}$.

方程(1)可以写成

$$Lx = -Nx - Rx + g(t). \quad (3)$$

因 L 是可逆的, 将 L^{-1} 作用于式(3), 得

$$x = \alpha + \beta t - L^{-1}Nx - L^{-1}Rx + L^{-1}g(t). \quad (4)$$

令

$$Nx = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n a_n, \quad (5)$$

其中 λ 是一参数, a_n 为 Adomian 多项式, 其计算公式为^[4]

$$a_n = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} \left[N \left(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k x_k \right) \right]_{\lambda=0}, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots, \quad (6)$$

其中 x_k 是解分量, 且

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} x_k. \quad (7)$$

将式(5)和式(7)代入式(4), 得各解分量的递推公式

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + \beta t + L^- g(t) \\ -L^- N a_0 - L^- R x_0 \\ -L^- N a_1 - L^- R x_1 \\ \vdots \\ -L^- N a_{n-1} - L^- R x_{n-1} \end{pmatrix}. \quad (8)$$

则非线性微分方程的 n 项近似解为

$$\varphi = \sum_{i=0}^{n-1} x_i. \quad (9)$$

2 二阶非线性微分方程的构建及其近似解析解的求解方法

如图 1 所示, 一质量为 m 的光滑小环, 套在一光滑的抛物线形金属丝上, 并可沿着金属丝滑动, 抛物线形金属丝以角速度 ω 绕轴匀速转动. 设抛物线的方程为 $x^2 = 4py$, 则小环在 x 方向的运动微分方程为^[1]

$$\ddot{x} + \frac{x\dot{x}^2}{x^2 + 4p^2} - \frac{4p^2\omega^2 x}{x^2 + 4p^2} + \frac{2pgx}{x^2 + 4p^2} = 0. \quad (10)$$

方程(10)可以写成

$$\ddot{x} = -\frac{x\dot{x}^2}{x^2 + 4p^2} - \frac{bx}{x^2 + 4p^2}, \quad (11)$$

其中,

$$b = 4p^2 \left(\frac{g}{2p} - \omega^2 \right) = 4p^2 (\omega_e^2 - \omega^2), \quad (12)$$

$\omega_e = \sqrt{\frac{g}{2p}}$ 为小环保持相对平衡时金属丝的转动角速度, 当 $\omega < \omega_e$ 时, $b > 0$; 当 $\omega > \omega_e$ 时, $b < 0$; 当 $\omega = \omega_e$ 时, $b = 0$.

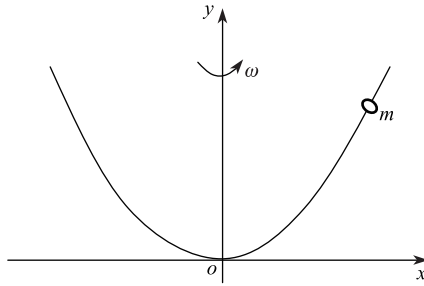


图1 匀速转动的抛物线形金属丝

Fig. 1 A parabolic wire rotating at a constant speed

方程(11)可以写成

$$Lx = -N_1x - N_2x, \quad (13)$$

其中

$$N_1x = \frac{x\dot{x}^2}{x^2 + 4p^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n a_{1,n}, \quad (14a)$$

$$N_2x = \frac{bx}{x^2 + 4p^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n a_{2,n}. \quad (14b)$$

与式(13)相对应的解分量的递推公式为

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + \beta t \\ -L^-N_1a_{1,0} - L^-N_2a_{2,0} \\ -L^-N_1a_{1,1} - L^-N_2a_{2,1} \\ \vdots \\ -L^-N_1a_{1,n-1} - L^-N_2a_{2,n-1} \end{pmatrix}, \quad (15)$$

只要算出式(14a)、式(14b)中的 Adomian 多项式 $a_{1,n}, a_{2,n}$, 代入式(15)就可得到非线性微分方程(11)的各解分量, 各解分量求和便得近似解析解.

根据式(6)可计算与 $N_1x = \frac{x\dot{x}^2}{x^2+4p^2}$ 对应的 Adomian 多项式 $a_{1,n}$. 其前 5 项 Adomian 多项式为

$$a_{1,0} = \frac{x_0\dot{x}_0^2}{x_0^2 + 4p^2}, \quad (16a)$$

$$a_{1,1} = \frac{x_1\dot{x}_0^2}{x_0^2 + 4p^2} + \frac{2x_0\dot{x}_0\dot{x}_1}{x_0^2 + 4p^2} - \frac{2x_0^2x_1\dot{x}_0^2}{(x_0^2 + 4p^2)^2}, \quad (16b)$$

$$\begin{aligned} a_{1,2} = & \frac{x_2\dot{x}_0^2}{x_0^2 + 4p^2} + \frac{2x_1\dot{x}_0\dot{x}_1}{x_0^2 + 4p^2} + \frac{x_0\dot{x}_1^2}{x_0^2 + 4p^2} + \frac{2x_0\dot{x}_0\dot{x}_2}{x_0^2 + 4p^2} \\ & - \frac{3x_0x_1^2\dot{x}_0^2}{(x_0^2 + 4p^2)^2} - \frac{4x_0^2x_1\dot{x}_0\dot{x}_1}{(x_0^2 + 4p^2)^2} - \frac{2x_0^2x_2\dot{x}_0^2}{(x_0^2 + 4p^2)^2} + \frac{4x_0^3x_1^2\dot{x}_0^2}{(x_0^2 + 4p^2)^3}, \end{aligned} \quad (16c)$$

$$\begin{aligned} a_{1,3} = & \frac{x_3\dot{x}_0^2}{x_0^2 + 4p^2} + \frac{2x_2\dot{x}_0\dot{x}_1}{x_0^2 + 4p^2} + \frac{x_1\dot{x}_1^2}{x_0^2 + 4p^2} + \frac{2x_1\dot{x}_0\dot{x}_2}{x_0^2 + 4p^2} + \frac{2x_0\dot{x}_1\dot{x}_2}{x_0^2 + 4p^2} + \frac{2x_0\dot{x}_0\dot{x}_3}{x_0^2 + 4p^2} \\ & - \frac{x_1^3\dot{x}_0^2}{(x_0^2 + 4p^2)^2} - \frac{2x_0^2x_1\dot{x}_1^2}{(x_0^2 + 4p^2)^2} - \frac{2x_0^2x_2\dot{x}_0^2}{(x_0^2 + 4p^2)^2} + \frac{8x_1^3x_1^2\dot{x}_0^2}{(x_0^2 + 4p^2)^3} - \frac{8x_0^4x_1^3\dot{x}_0^2}{(x_0^2 + 4p^2)^4}, \end{aligned} \quad (16d)$$

$$\begin{aligned}
a_{1,4} = & \frac{x_0 \dot{x}_2^2}{x_0^2 + 4p^2} + \frac{x_2 \dot{x}_1^2}{x_0^2 + 4p^2} + \frac{2x_3 \dot{x}_0 \dot{x}_1}{x_0^2 + 4p^2} + \frac{2x_1 \dot{x}_1 \dot{x}_2}{x_0^2 + 4p^2} + \frac{2x_0 \dot{x}_1 \dot{x}_3}{x_0^2 + 4p^2} \\
& + \frac{2x_1 \dot{x}_0 \dot{x}_3}{x_0^2 + 4p^2} + \frac{2x_0 \dot{x}_0 \dot{x}_4}{x_0^2 + 4p^2} + \frac{2x_2 \dot{x}_0 \dot{x}_2}{x_0^2 + 4p^2} + \frac{x_4 \dot{x}_0^2}{x_0^2 + 4p^2} - \frac{2x_1^3 \dot{x}_0 \dot{x}_1}{(x_0^2 + 4p^2)^2} \\
& - \frac{3x_0 x_1^2 \dot{x}_1^2}{(x_0^2 + 4p^2)^2} - \frac{2x_0^2 x_2 \dot{x}_1^2}{(x_0^2 + 4p^2)^2} - \frac{2x_0^2 x_4 \dot{x}_0^2}{(x_0^2 + 4p^2)^2} - \frac{3x_1^2 x_2 \dot{x}_0^2}{(x_0^2 + 4p^2)^2} \\
& - \frac{3x_0 x_2^2 \dot{x}_0^2}{(x_0^2 + 4p^2)^2} - \frac{12x_0 x_1 x_2 \dot{x}_0 \dot{x}_1}{(x_0^2 + 4p^2)^2} - \frac{6x_0 x_1 x_3 \dot{x}_0^2}{(x_0^2 + 4p^2)^2} - \frac{4x_0^2 x_1 \dot{x}_1 \dot{x}_2}{(x_0^2 + 4p^2)^2} \\
& - \frac{4x_0^2 x_1 \dot{x}_0 \dot{x}_3}{(x_0^2 + 4p^2)^2} - \frac{4x_0^2 x_3 \dot{x}_0 \dot{x}_1}{(x_0^2 + 4p^2)^2} - \frac{6x_0 x_1^2 \dot{x}_0 \dot{x}_2}{(x_0^2 + 4p^2)^2} - \frac{4x_0^2 x_2 \dot{x}_0 \dot{x}_2}{(x_0^2 + 4p^2)^2} \\
& + \frac{4x_0^3 x_1^2 \dot{x}_1^2}{(x_0^2 + 4p^2)^3} + \frac{5x_0 x_4^2 \dot{x}_0^2}{(x_0^2 + 4p^2)^3} + \frac{4x_0^3 x_2^2 \dot{x}_0^2}{(x_0^2 + 4p^2)^3} + \frac{16x_0^3 x_1 x_2 \dot{x}_0 \dot{x}_1}{(x_0^2 + 4p^2)^3} \\
& + \frac{16x_0^2 x_1^3 \dot{x}_0 \dot{x}_1}{(x_0^2 + 4p^2)^3} + \frac{8x_0^3 x_1^2 \dot{x}_0 \dot{x}_2}{(x_0^2 + 4p^2)^3} + \frac{24x_0^2 x_1^2 x_2 \dot{x}_0^2}{(x_0^2 + 4p^2)^3} + \frac{8x_0^3 x_1 x_3 \dot{x}_0^2}{(x_0^2 + 4p^2)^3} \\
& - \frac{20x_0^3 x_1^4 \dot{x}_0^2}{(x_0^2 + 4p^2)^4} - \frac{16x_0^4 x_1^3 \dot{x}_0 \dot{x}_1}{(x_0^2 + 4p^2)^4} - \frac{24x_0^4 x_1^2 x_2 \dot{x}_0^2}{(x_0^2 + 4p^2)^4} + \frac{16x_0^5 x_1^4 \dot{x}_0^2}{(x_0^2 + 4p^2)^5}. \quad (16e)
\end{aligned}$$

与 $N_2 x = \frac{bx}{x^2 + 4p^2}$ 对应的前 5 项 Adomian 多项式为

$$a_{2,0} = \frac{bx_0}{x_0^2 + 4p^2}, \quad (17a)$$

$$a_{2,1} = \frac{bx_1}{x_0^2 + 4p^2} - \frac{2bx_0^2 x_1}{(x_0^2 + 4p^2)^2}, \quad (17b)$$

$$a_{2,2} = \frac{bx_2}{x_0^2 + 4p^2} - \frac{3bx_0 x_1^2}{(x_0^2 + 4p^2)^2} - \frac{2bx_0^2 x_2}{(x_0^2 + 4p^2)^2} + \frac{4bx_0^3 x_1^2}{(x_0^2 + 4p^2)^3}, \quad (17c)$$

$$\begin{aligned}
a_{2,3} = & \frac{bx_3}{x_0^2 + 4p^2} - \frac{6bx_0 x_1 x_2}{(x_0^2 + 4p^2)^2} - \frac{bx_1^3}{(x_0^2 + 4p^2)^2} - \frac{2bx_0^2 x_3}{(x_0^2 + 4p^2)^2} \\
& + \frac{8bx_0^2 x_1^3}{(x_0^2 + 4p^2)^3} + \frac{8bx_0^3 x_1 x_2}{(x_0^2 + 4p^2)^3} - \frac{8bx_0^4 x_1^3}{(x_0^2 + 4p^2)^4} \quad (17d)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_{2,4} = & \frac{bx_4}{x_0^2 + 4p^2} - \frac{6bx_0 x_1 x_3}{(x_0^2 + 4p^2)^2} - \frac{3bx_1^2 x_2}{(x_0^2 + 4p^2)^2} - \frac{3bx_0 x_2^2}{(x_0^2 + 4p^2)^2} \\
& - \frac{2bx_0^2 x_4}{(x_0^2 + 4p^2)^2} + \frac{24bx_0^2 x_1^2 x_2}{(x_0^2 + 4p^2)^3} + \frac{5bx_0 x_1^4}{(x_0^2 + 4p^2)^3} + \frac{4bx_0^3 x_2^2}{(x_0^2 + 4p^2)^3} \\
& + \frac{8bx_0^3 x_1 x_3}{(x_0^2 + 4p^2)^3} - \frac{20bx_0^3 x_1^4}{(x_0^2 + 4p^2)^4} - \frac{24bx_0^4 x_1^2 x_2}{(x_0^2 + 4p^2)^4} + \frac{16bx_0^5 x_1^4}{(x_0^2 + 4p^2)^5} \quad (17e)
\end{aligned}$$

3 近似解析解与结果比较

将式(16), 式(17)代入式(15)能得到各解分量, 求和后可得非线性微分方程近似解析解的一般表达式. 但由于式(16), 式(17)过于复杂且与初始条件 x_0, \dot{x}_0 和参数 p, b 有关, 难以从所得解析解的一般表达式中讨论其准确性. 因此, 我们给定一组初始条件 x_0, \dot{x}_0 和参数 p, b , 得到解析解的表达式并作出其解曲线, 并将解曲线与直接用 Mathematica 软件作出的解曲线以及同伦渐近法^[2]所得解曲线进行比较, 来说明结果的准确性.

设初始条件和参数为 $x_0 = 1, \dot{x}_0 = 0, p = b = 0.25$, 将它们代入式(16)和式(17)可

得 $a_{1,n}, a_{2,n} (n = 0, 1, 2, 3, 4)$, 具体为

$$a_{1,0} = 0, \quad (18a)$$

$$a_{1,1} = 0, \quad (18b)$$

$$a_{1,2} = \frac{4\dot{x}_1^2}{5}, \quad (18c)$$

$$a_{1,3} = -\frac{12x_1\dot{x}_1^2}{25} + \frac{8}{5}\dot{x}_1\dot{x}_2, \quad (18d)$$

$$a_{1,4} = -\frac{12}{25}x_2\dot{x}_1^2 - \frac{24}{25}x_1\dot{x}_1\dot{x}_2 + \frac{4}{5}\dot{x}_2^2 + \frac{8}{5}\dot{x}_1\dot{x}_3 + \frac{16}{125}x_1^2\dot{x}_1^2, \quad (18e)$$

$$a_{2,0} = \frac{1}{5}, \quad (18f)$$

$$a_{2,1} = -\frac{3x_1}{25}, \quad (18g)$$

$$a_{2,2} = \frac{4}{125}x_1^2 - \frac{3}{25}x_2, \quad (18h)$$

$$a_{2,3} = \frac{28}{625}x_1^3 + \frac{8}{125}x_1x_2 - \frac{3}{25}x_3, \quad (18i)$$

$$a_{2,4} = -\frac{3x_4}{25} + \frac{8x_1x_3}{125} + \frac{4x_2^2}{125} + \frac{84x_1^2x_2}{625} - \frac{304x_1^4}{3125}. \quad (18j)$$

将初始条件和式(18)依次代入式(15), 可得如下解分量, 为

$$x_0 = 1, \quad (19a)$$

$$x_1 = -\frac{1}{10}t^2, \quad (19b)$$

$$x_2 = -\frac{1}{1000}t^4, \quad (19c)$$

$$x_3 = -\frac{1}{375}t^4 - \frac{11}{750000}t^6, \quad (19d)$$

$$x_4 = -\frac{11}{93750}t^6 + \frac{229}{350} \times 10^{-6}t^8, \quad (19e)$$

$$x_5 = -\frac{16}{140625}t^6 - \frac{257}{65625000}t^8 + \frac{289397}{236250} \times 10^{-7}t^{10}. \quad (19f)$$

则在 3 项、4 项、5 项截断的近似解析解分别为

$$\varphi^3 = \sum_{i=0}^3 x_i = 1 - \frac{1}{10}t^2 - \frac{11}{3000}t^4 - \frac{11}{750000}t^6, \quad (20)$$

$$\varphi^4 = \sum_{i=0}^4 x_i = 1 - \frac{1}{10}t^2 - \frac{11}{3000}t^4 - \frac{33}{250000}t^6 + \frac{229}{350} \times 10^{-6}t^8, \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \varphi^5 = \sum_{i=0}^5 x_i = 1 - \frac{1}{10}t^2 - \frac{11}{3000}t^4 - \frac{553}{225} \times 10^{-4}t^6 \\ - \frac{137}{42} \times 10^{-6}t^8 + \frac{289397}{236250} \times 10^{-7}t^{10}. \end{aligned} \quad (22)$$

式(22)中第二个等号后的第一项“1”表示初位置, 第二项“ $-\frac{1}{10}t^2$ ”反映初加速度的大小, 且初加速度大小由 Adomian 多项式 $a_{1,0}, a_{2,0}$ 之和决定, 即由初始条件 x_0, \dot{x}_0 和微分方程的参数 p, b 确定.

在相同的初始条件和参数下, 文献[2]中式(58)表示的近似解为

$$\varphi = 1.092\,937\,297 \cos(\Omega t) - 0.123\,160\,203 \cos(3\Omega t) + 0.030\,222\,906 \cos(5\Omega t), \quad (23)$$

其中 $\Omega = 0.596\,211\,722$.

如图2所示, 红色曲线是根据式(22)作出的解曲线, 蓝色曲线是根据式(23)作出的解曲线, 黑色曲线是用 Mathematica 软件作出的解曲线. 从图2中可以看出, 在第一个 $1/4$ 周期内, 由近似解式(22)作出的解曲线与直接用 Mathematica 软件作出的解曲线十分吻合, 且其误差比用同伦渐近法得到的解曲线还小. 但是在时间较大区域, 近似解式(22)作出的解曲线会出现较大的误差. 产生误差的主要原因是, 用 Adomian 分解法解非线性微分方程, 当 $n \rightarrow \infty$ 时才达到较高的近似度. 因文中方程过于复杂, 本文只计算到前5项, 从而在时间较长时出现较大误差.

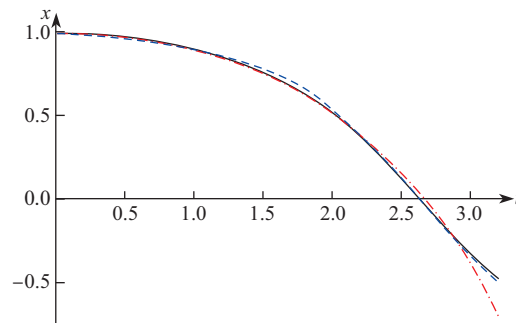


图2 根据式(22)作出的曲线(红色曲线), 根据式(23)作出的曲线(蓝色曲线), 数值解曲线(黑色曲线)

Fig. 2 The red curve is constructed according to Eq. (22), the blue curve is constructed according to Eq. (23), and the black curve is constructed according to the numerical solution

如图3所示, 蓝色曲线、绿色曲线和红色曲线分别表示在3项、4项、5项截断时的近似解析解曲线, 黑色曲线是用 Mathematica 软件作出的解曲线. 从图3可见, 在第一个 $1/4$ 周期时间内, 5项截断比3项、4项截断更接近数值解.

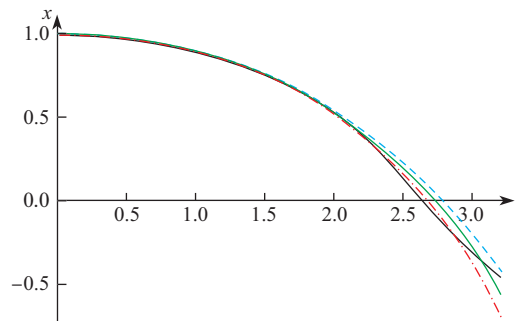


图3 根据式(20)作出的曲线(蓝色曲线), 根据式(21)作出的曲线(绿色曲线), 根据式(22)作出的曲线(红色曲线), 数值解曲线(黑色曲线)

Fig. 3 The blue curve is constructed according to Eq. (20), the green curve is constructed according to Eq. (21), the red curve is constructed according to Eq. (22), and the black curve is made according to the numerical solution

另外, Adomian 多项式(16)、(17)是由初始条件 x_0, \dot{x}_0 、非线性微分方程的参数 p, b 及解分量 $x_i^n, \dot{x}_i^m (i, n, m = 1, 2, \dots, 4)$ 表示的多项式, 其中的初始条件 x_0, \dot{x}_0 和参数 p, b 可以任意选取. 由递推公式(15)得到的解分量具有普遍性, 任取一组初始条件 x_0, \dot{x}_0 和参数 p, b , 就可得到一组相应的解析解表达式及其解曲线, 并与直接用 Mathematica 软件作出的解曲线进行比较, 仍可得出在第一个 $1/4$ 周期时间内两者十分吻合的结论.

设初始条件和参数变为 $x_0 = 1, \dot{x}_0 = 0, p = 0.25, b = 1$, 按上述相同方法可得其在 5 项截断的近似解析解

$$\varphi^5 = \sum_{i=0}^5 x_i = 1 - \frac{2}{5}t^2 - \frac{22}{375}t^4 - \frac{6\,558}{140\,625}t^6 - \frac{7\,541}{8\,203\,125}t^8 + \frac{1\,145\,066}{9\,228\,515\,625}t^{10}. \quad (24)$$

如图 4 所示. 红色曲线是根据式(24)作出的解曲线, 黑色曲线是用 Mathematica 软件作出的解曲线. 从图 4 中可以看出, 在第一个 $1/4$ 周期内, 由近似解式(24)作出的解曲线与用 Mathematica 软件作出的解曲线比较吻合, 说明在不同的参数下, 用 Adomian 分解法得到的近似解的准确性具有普遍性, 与参数的选取无关.

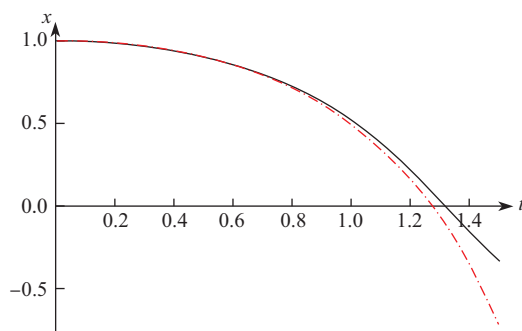


图 4 根据式(24)作出的曲线(红色曲线), 数值解曲线(黑色曲线)

Fig. 4 The red curve is constructed according to Eq. (24) and the black curve is constructed according to the numerical solution

4 结 论

研究力学系统在非惯性转动参照系中运动时常常会遇到分子分母中均含非线性项的二阶微分方程, 因方程复杂而无法直接求得其解析解, 从而无法了解力学体系的运动规律. 本文用 Adomian 分解法得到了在给定初始条件和参数下的 3 项、4 项和 5 项截断的近似解析解, 并通过作图与直接用 Mathematica 软件作出的解曲线以及同伦渐近法所得解曲线进行了比较. 结果表明, 在第一个 $1/4$ 周期时间内(如图 2 所示), 5 项截断的近似解的解曲线与直接用 Mathematica 软件作出的解曲线十分吻合, 并且其误差比文献 [2] 用同伦渐近法得到的解曲线还小. 由于 Adomian 分解法要在 $n \rightarrow \infty$ 时其解才会接近数值解, 因此在只计算有限项近似解, 且在时间取值较大时会存在较大的误差, 这也是 Adomian 分解法的不足之处. 另外, 对于数值解具有周期性的运动, 用多项式表示近似解存在收敛性的问题, 这一问题我们将另文研究.

[参 考 文 献]

- [1] 周衍柏. 理论力学[M]. 3版. 北京: 高等教育出版社, 2009: 269.
- [2] MARINCA V, HERISANU N. Determination of periodic solutions for the motion of a particle on a rotating parabola by means of the optimal homotopy asymptotic[J]. Journal of Sound and Vibration. 2010, 329: 1450-1459.
- [3] 方锦清, 姚伟光. 逆算符方法求解非线性动力学方程及其一些应用实例[J]. 物理学报, 1993, 42(9): 1375-1384.
- [4] BIAZAR J, SHAFIOF S M. A simple algorithm for calculating Adomian polynomials[J]. Int J Contemp Math Sci, 2007, 20(2): 975-982.
- [5] 段俊生. Adomian多项式的计算及其在整数阶和分数阶非线性微分方程中的应用[J]. 应用数学与计算数学学报, 2015, 29(2): 187-210.
- [6] ZHU Y G, CHANG Q S, WU S C. A new algorithm for calculating Adomian polynomials [J]. Appl Math Comput, 2005, 169: 402-416.
- [7] DUAN J S. Convenient analytic recurrence algorithms for the Adomian polynomials[J]. Appl Math Comput, 2011, 217: 6337-6348.
- [8] DUAN J S, RACH R. The degenerate form of the Adomian polynomials in the power series method for nonlinear ordinary differential equations[J]. J Math System Sci, 2015(5): 411-428.
- [9] RACH R, WAZWAZ A M, DUAN J S. A reliable modification of the Adomian decomposition method for higher-order nonlinear differential equations[J]. Kybernetes, 2013, 42: 282-308.
- [10] LESNIC D. The decomposition method for nonlinear, second-order parabolic partial differential equations[J]. Int J Comput Math Numeric Simul, 2008(1): 207-233.
- [11] PATEL A, SERRANO S E. Decomposition solution of multidimensional groundwater equations[J]. J Hydrology, 2011, 397: 202-209.
- [12] RAMANA P V, RAGHU-PRASAD B K. Modified Adomian decomposition method for Van der Pol equations[J]. International Journal of Non-Linear Mechanics, 2014, 65: 121-132.
- [13] CHEN F, LIU Q Q. Modified asymptotic Adomian decomposition method for solving Boussinesq equation of groundwater flow[J]. Applied Mathematics and Mechanics, 2014, 35(4): 481-488.
- [14] BOUGOFFA L, RACH R, WAZWAZ A M, et al. On the Adomian decomposition method for solving the Stefan problem[J]. International Journal of Numerical Methods for Heat & Fluid Flow, 2015, 25(4): 912-928.
- [15] KHAN Y, VAZQUEZ-LEAL H, FARAZ N. An auxiliary parameter method using Adomian polynomials and Laplace transformation for nonlinear differential equations[J]. Applied Mathematical Modelling, 2013, 27: 2702-2708.
- [16] HOSSEINI M M, JAFARI M. A note on the use of Adomian decomposition method for high-order and system of nonlinear differential equations[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2009, 14: 1952-1957.
- [17] SHEHAHA M M. A study of some nonlinear partial differential equations by using Adomian decomposition method and variational iteration method[J]. American Journal of Computational Mathematics. 2015(5): 195-203.

(责任编辑: 李 艺)