

文章编号: 1000-5641(2019)02-0001-06

严格次对角占优线性方程组迭代法的收敛性分析

蔡 静^{1,2}

(1. 东南大学 数学学院, 南京 211189; 2. 湖州师范学院 理学院, 浙江 湖州 313000)

摘要: Jacobi 迭代法、Guass-Seidel 迭代法和 SOR 迭代法是求解线性方程组的常用迭代方法. 本文证明了系数矩阵严格次对角占优时, Jacobi 迭代法、Guass-Seidel 迭代法和 SOR 迭代法均收敛, 并给出了相应的误差估计. 通过比较三种迭代法的误差上界, 指明 Guass-Seidel 迭代法的误差上界最小.

关键词: 线性方程组; 迭代法; 严格次对角占优; 误差上界

中图分类号: O241.6 文献标志码: A DOI: 10.3969/j.issn.1000-5641.2019.02.001

Convergence analysis of iterative methods for strictly sub-diagonally dominant linear equations

CAI Jing^{1,2}

(1. School of Mathematics, Southeast University, Nanjing 211189, China;

2. College of Science, Huzhou University, Huzhou Zhejiang 313000, China)

Abstract: The Jacobi iterative method, Guass-Seidel iterative method, and SOR iterative method are commonly used in solving linear equations. When the coefficient matrix of a system of linear equations is strictly sub-diagonally dominant, we demonstrate that the Jacobi, Guass-Seidel, and SOR iterative methods are all convergent. By comparing the upper bounds of error for the three iterative methods, we show that the upper bound of error for the Guass-Seidel iterative method is minimal.

Keywords: linear equations; iterative method; strictly sub-diagonally dominant; error bounds

0 引 言

对角占优矩阵是应用非常广泛的矩阵类, 它较多出现于经济价值模型和反网络系统的系数矩阵及微分方程的数值解法中, 在信息论、系统论、现代经济学和程序设计等众多领域都有着十分重要的应用. 文献 [1] 和 [2] 分别研究了广义对角矩阵、广义次对角矩阵、 α -次对角占优矩阵和广义严格次对角占优矩阵, 给出了相应的判定定理. 文献 [3] 研究了弱严格对角占优矩阵, 给出了矩阵非奇异的判定条件. 文献 [4] 研究了 Ostrowski 对角占优矩阵的判

收稿日期: 2018-04-02

基金项目: 国家自然科学基金(11771076); 中国博士后基金(2016M601688)

作者简介: 蔡 静, 女, 副教授, 研究方向为数值代数. E-mail: caijing@zjhu.edu.cn.

定方法. 文献 [5] 给出了几类对角占优矩阵行列式的界. 对于系数矩阵为对角占优矩阵的线性方程组, 文献 [6] 给出了系数矩阵严格对角占优时, Jacobi、Guass-Seidel 和 SOR 迭代法的收敛定理. 文献 [7] 研究了系数矩阵为 α 严格对角占优矩阵时, 几种常用迭代法的收敛性. 文献 [8] 建立了对角占优三对角型线性方程组解的分量扰动界和精确算法. 文献 [9] 讨论了系数矩阵为严格对角占优矩阵时, Jacobi 迭代矩阵与 Gauss-Seidel 迭代矩阵的谱半径, 进而对两种迭代法的收敛速度进行了比较.

本文考虑线性方程组的系数矩阵为严格次对角占优阵时, 几类常用迭代法的收敛性和收敛速度, 尝试解决如下两个问题:

问题 I 若 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 为严格次对角占优矩阵, 则解线性方程组 $Ax = b$ 的 Jacobi 迭代法、Guass-Seidel 迭代法和 SOR 迭代法是否收敛? 若收敛, 给出相应的误差估计式.

问题 II Jacobi 迭代法、Guass-Seidel 迭代法及 SOR 迭代法的误差上界比较.

1 预备知识

定义 1.1^[10] 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$, 若 $|a_{ii}| \geq \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$, 则称 A 为对角占优矩阵. 当上式的每个不等号都严格成立时, 则称 A 为严格对角占优矩阵.

定义 1.2^[10] 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$, 若 $|a_{i, n-i+1}| \geq \sum_{j \neq n-i+1} |a_{ij}|, \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$, 则称 A 为次对角占优矩阵. 当上式的每个不等号都严格成立时, 则称 A 为严格次对角占优矩阵.

引理 1.1^[10] 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$, $B = (b_{ij})_{n \times m}$, 若矩阵 A 严格对角占优, 则

$$\|A^{-1}B\|_{\infty} \leq \max_{1 \leq i \leq n} \frac{\sum_{j=1}^m |b_{ij}|}{|a_{ii}| - \sum_{j \neq i} |a_{ij}|}. \quad (1)$$

引理 1.2^[11] 若迭代矩阵 B 的范数 $\|B\|_{\infty} < 1$, 则迭代公式 $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + f, k = 0, 1, 2, \dots$, 收敛于方程组的解 x^* . 相应的误差估计式为

$$\|x^{(k)} - x^*\|_{\infty} \leq \frac{\|B\|_{\infty}^k}{1 - \|B\|_{\infty}} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|_{\infty}. \quad (2)$$

2 三种迭代法的收敛性

本文常用如下矩阵:

$$D = \begin{pmatrix} a_{1n} & & & & \\ & a_{2,n-1} & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & a_{n-1,2} & \\ & & & & a_{n1} \end{pmatrix}, \quad L = \begin{pmatrix} & & & 0 & \\ & & & 0 & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & 0 & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$U = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ a_{n-1,1} & 0 & & & \\ 0 & & & & \end{pmatrix}.$$

定理 2.1 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 严格次对角占优, 则线性方程组 $Ax = b$ 的 Jacobi 迭代法 $x^{(k+1)} = C_M x^{(k)} + D_M$ 收敛于方程组的解 x^* . 相应的误差估计式为

$$\|x^{(k)} - x^*\|_\infty \leq \frac{M^k}{1-M} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|_\infty, \quad (3)$$

其中 $C_M = -D^{-1}(L+U)S_n$, $D_M = D^{-1}b$, $M = \max_{1 \leq i \leq n} \frac{\sum_{j \neq n-i+1} |a_{ij}|}{|a_{i, n-i+1}|}$.

证 明 由 Jacobi 迭代法得:

$$\begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \\ \vdots \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}^{(k+1)} = -D^{-1}(L+U)S_n \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \\ \vdots \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}^{(k)} + D^{-1}b, \quad (4)$$

其中 S_n 为 n 阶反单位矩阵. 记上式为

$$x^{(k+1)} = C_M x^{(k)} + D_M. \quad (5)$$

由引理 1.1 得, $\|C_M\|_\infty \leq \max_{1 \leq i \leq n} \frac{\sum_{j \neq n-i+1} |a_{ij}|}{|a_{i, n-i+1}|}$. 记 $M = \max_{1 \leq i \leq n} \frac{\sum_{j \neq n-i+1} |a_{ij}|}{|a_{i, n-i+1}|}$. 因为 A 为严格次对角占优矩阵, 所以 $|a_{i, n-i+1}| > \sum_{j \neq n-i+1} |a_{ij}|$, 从而 $\|C_M\|_\infty \leq M < 1$. 结合引理 1.2 可得, 解线性方程组 $Ax = b$ 的 Jacobi 迭代法收敛于方程组的解 x^* . 相应的误差估计式为 $\|x^{(k)} - x^*\|_\infty \leq \frac{M^k}{1-M} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|_\infty$.

定理 2.2 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 严格次对角占优, 则线性方程组 $Ax = b$ 的 Gauss-Seidel 迭代法 $x^{(k+1)} = E_N x^{(k)} + F_N$ 收敛于方程组的解 x^* . 相应的误差估计式为

$$\|x^{(k)} - x^*\|_\infty \leq \frac{N^k}{1-N} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|_\infty, \quad (6)$$

其中 $E_N = -(D + LS_n)^{-1}US_n$, $F_N = (D + LS_n)^{-1}b$, $N = \max\{N_1, N_2, 0\}$, $N_1 = \frac{\sum_{j=1}^{n-1} |a_{1j}|}{|a_{1n}|}$, $N_2 = \max_{1 \leq i \leq n} \frac{\sum_{j=1}^{n-i} |a_{ij}|}{|a_{i, n-i+1}| - \sum_{j=n-i+2}^n |a_{ij}|}$,

证 明 由 Gauss-Seidel 迭代法原理得:

$$\begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \\ \vdots \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}^{(k+1)} = -(D + LS_n)^{-1}US_n \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \\ \vdots \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}^{(k)} + (D + LS_n)^{-1}b, \quad (7)$$

其中

$$US_n = \begin{pmatrix} 0 & a_{1, n-1} & \cdots & a_{12} & a_{11} \\ & 0 & \cdots & a_{22} & a_{21} \\ & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & 0 & a_{n-1, 1} \\ & & & & 0 \end{pmatrix}, \quad D + LS_n = \begin{pmatrix} a_{1n} & & & & \\ a_{2n} & a_{2, n-1} & & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ a_{n-1, n} & a_{n-1, n-1} & \cdots & a_{n-1, 2} & \\ a_{nn} & a_{n, n-1} & \cdots & a_{n2} & a_{n1} \end{pmatrix}.$$

将式(7)记为

$$x^{(k+1)} = E_N x^{(k)} + F_N. \quad (8)$$

由引理 1.1 得,

$$\|E_N\|_\infty \leq \max_{1 \leq i \leq n} \begin{cases} \frac{\sum_{j=1}^{n-1} |a_{1j}|}{|a_{1n}|}, & i = 1, \\ \frac{\sum_{j=1}^{n-i} |a_{ij}|}{|a_{i,n-i+1}| - \sum_{j=n-i+2}^n |a_{ij}|}, & 1 < i < n, \\ 0, & i = n. \end{cases}$$

记 $N_1 = \frac{\sum_{j=1}^{n-1} |a_{1j}|}{|a_{1n}|}$, $N_2 = \max_{1 \leq i \leq n} \frac{\sum_{j=1}^{n-i} |a_{ij}|}{|a_{i,n-i+1}| - \sum_{j=n-i+2}^n |a_{ij}|}$. 因为 A 为严格次对角占优矩阵, 故 $N_1 < 1$ 成立. 且 $|a_{i,n-i+1}| > \sum_{j \neq n-i+1} |a_{ij}|$, 从而 $|a_{i,n-i+1}| > \sum_{j=1}^{n-i} |a_{ij}| + \sum_{j=n-i+2}^n |a_{ij}|$, 进而 $|a_{i,n-i+1}| - \sum_{j=n-i+2}^n |a_{ij}| > \sum_{j=1}^{n-i} |a_{ij}|$, 故 $N_2 < 1$. 从而 $N = \max\{N_1, N_2, 0\} < 1$. 结合引理 1.2, 线性方程组 $Ax = b$ 的 Gauss-Seidel 迭代法 $x^{(k+1)} = E_N x^{(k)} + F_N$ 收敛于方程组的解 x^* . 相应的误差估计式为 $\|x^{(k)} - x^*\|_\infty \leq \frac{N^k}{1-N} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|_\infty$.

定理 2.3 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 严格次对角占优, 则当 $0 < \omega \leq 1$ 时, 线性方程组 $Ax = b$ 的 SOR 迭代法 $x^{(k+1)} = G_P x^{(k)} + H_P$ 收敛于方程组的解 x^* . 相应的误差估计式为

$$\|x^{(k)} - x^*\|_\infty \leq \frac{P^k}{1-P} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|_\infty, \quad (9)$$

其中 $G_N = (D + \omega L S_n)^{-1}[(1-\omega)D - \omega U S_n]$, $F_N = \omega(D + \omega L S_n)^{-1}b$, $P = \max\{P_1, P_2, P_3\}$, $P_1 = \frac{(1-\omega)|a_{1n}| + \omega \sum_{j=1}^{n-1} |a_{1j}|}{|a_{1n}|}$, $P_2 = \max_{1 < i < n} \frac{(1-\omega)|a_{i,n-i+1}| + \omega \sum_{j=1}^{n-i} |a_{ij}|}{|a_{i,n-i+1}| - \omega \sum_{j=n-i+2}^n |a_{ij}|}$, $P_3 = \frac{(1-\omega)|a_{n1}|}{|a_{n1}| - \omega \sum_{j=2}^n |a_{nj}|}$.

证 明 由 SOR 迭代法原理得:

$$\begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \\ \vdots \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}^{(k+1)} = (D + \omega L S_n)^{-1}[(1-\omega)D - \omega U S_n] \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \\ \vdots \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}^{(k)} + \omega(D + \omega L S_n)^{-1}b. \quad (10)$$

将式 (10) 记为

$$x^{(k+1)} = G_P x^{(k)} + H_P. \quad (11)$$

由引理 1.1 得,

$$\|G_P\|_\infty \leq \max_{1 \leq i \leq n} \begin{cases} \frac{(1-\omega)|a_{1n}| + \omega \sum_{j=1}^{n-1} |a_{1j}|}{|a_{1n}|}, & i = 1, \\ \frac{(1-\omega)|a_{i,n-i+1}| + \omega \sum_{j=1}^{n-i} |a_{ij}|}{|a_{i,n-i+1}| - \omega \sum_{j=n-i+2}^n |a_{ij}|}, & 1 < i < n, \\ \frac{(1-\omega)|a_{n1}|}{|a_{n1}| - \omega \sum_{j=2}^n |a_{nj}|}, & i = n. \end{cases}$$

记 $P_1 = \frac{(1-\omega)|a_{1n}| + \omega \sum_{j=1}^{n-1} |a_{1j}|}{|a_{1n}|}$, $P_2 = \max_{1 \leq i < n} \frac{(1-\omega)|a_{i,n-i+1}| + \omega \sum_{j=1}^{n-i} |a_{ij}|}{|a_{i,n-i+1}| - \omega \sum_{j=n-i+2}^n |a_{ij}|}$, $P_3 = \frac{(1-\omega)|a_{n1}|}{|a_{n1}| - \omega \sum_{j=2}^n |a_{nj}|}$.

(i) 当 $\omega = 1$ 时, 由于 A 严格次对角占优, $|a_{1n}| > \sum_{j=1}^{n-1} |a_{1j}|$, 故 $P_1 < 1$. 由于 $|a_{i,n-i+1}| > \sum_{j=1}^{n-i} |a_{ij}| + \sum_{j=n-i+2}^n |a_{ij}|$, 故 $|a_{i,n-i+1}| - \sum_{j=n-i+2}^n |a_{ij}| > \sum_{j=1}^{n-i} |a_{ij}|$, 从而 $P_2 < 1$. 而且 $P_3 = 0 < 1$. 从而 $P = \max\{P_1, P_2, P_3\} < 1$.

(ii) 当 $0 < \omega < 1$ 时, $\omega|a_{1n}| > \omega \sum_{j=1}^{n-1} |a_{1j}| + (1-\omega)|a_{1n}| - (1-\omega)|a_{1n}|$, 即 $|a_{1n}| > (1-\omega)|a_{1n}| + \omega \sum_{j=1}^{n-1} |a_{1j}|$, 故 $P_1 < 1$. 又因为 $|a_{i,n-i+1}| > \sum_{j=1}^{n-i} |a_{ij}| + \sum_{j=n-i+2}^n |a_{ij}|$. 故有 $\omega|a_{i,n-i+1}| > \omega \sum_{j=1}^{n-i} |a_{ij}| + \omega \sum_{j=n-i+2}^n |a_{ij}| + (1-\omega)|a_{i,n-i+1}| - (1-\omega)|a_{i,n-i+1}|$. 所以 $|a_{i,n-i+1}| - \omega \sum_{j=n-i+2}^n |a_{ij}| > (1-\omega)|a_{i,n-i+1}| + \omega \sum_{j=1}^{n-i} |a_{ij}|$, 故 $P_2 < 1$. 由于 $\omega|a_{n1}| > \omega \sum_{j=2}^n |a_{nj}| + (1-\omega)|a_{n1}| - (1-\omega)|a_{n1}|$, 即 $|a_{n1}| - \omega \sum_{j=2}^n |a_{nj}| > (1-\omega)|a_{n1}|$, 故 $P_3 < 1$. 从而 $P = \max\{P_1, P_2, P_3\} < 1$. 根据引理 1.2, 线性方程组 $Ax = b$ 的 SOR 迭代法 $x^{(k+1)} = G_P x^{(k)} + H_P$ 收敛于方程组的解 x^* . 相应的误差估计式为 $\|x^{(k)} - x^*\|_\infty \leq \frac{P^k}{1-P} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|_\infty$.

3 三种迭代法的误差上界比较

定理 3.1 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 为严格次对角占优矩阵, 则关于线性方程组 $Ax = b$ 的 Jacobi 迭代法和 Gauss-Seidel 迭代法, 有

$$\|x^{(k)} - x^*\|_\infty \leq \frac{N^k}{1-N} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|_\infty \leq \frac{M^k}{1-M} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|_\infty. \quad (12)$$

证 明 由定理 2.1 和定理 2.2 知,

$$M = \max_{1 \leq i \leq n} \frac{\sum_{j \neq n-i+1} |a_{ij}|}{|a_{i,n-i+1}|}, \quad N_1 = \frac{\sum_{j=1}^{n-1} |a_{1j}|}{|a_{1n}|},$$

$$N_2 = \max_{1 \leq i \leq n} \frac{\sum_{j=1}^{n-i} |a_{ij}|}{|a_{i,n-i+1}| - \sum_{j=n-i+2}^n |a_{ij}|}, \quad N = \max\{N_1, N_2, 0\}.$$

(i) 当 M, N_1 同行时, $M = \frac{\sum_{j=1}^{n-1} |a_{1j}|}{|a_{1n}|} = N_1$.

(ii) 当 M, N_1 不同行时, 记与 N_1 同行为 $\hat{M}$, 则 $N_1 = \hat{M} < M$.

(iii) 当 M, N_2 同行时,

$$\begin{aligned} & \frac{\sum_{j \neq n-i+1} |a_{ij}|}{|a_{i,n-i+1}|} - \frac{\sum_{j=1}^{n-i} |a_{ij}|}{|a_{i,n-i+1}| - \sum_{j=n-i+2}^n |a_{ij}|} \\ &= \frac{|a_{i,n-i+1}| \sum_{j \neq n-i+1} |a_{ij}| - \sum_{j=n-i+2}^n |a_{ij}| \sum_{j \neq n-i+1} |a_{ij}| - |a_{i,n-i+1}| \sum_{j=1}^{n-i} |a_{ij}|}{|a_{i,n-i+1}|(|a_{i,n-i+1}| - \sum_{j=n-i+2}^n |a_{ij}|)} \\ &= \frac{|a_{i,n-i+1}| \sum_{j=n-i+2}^n |a_{ij}| - \sum_{j=n-i+2}^n |a_{ij}| \sum_{j \neq n-i+1} |a_{ij}|}{|a_{i,n-i+1}|(|a_{i,n-i+1}| - \sum_{j=n-i+2}^n |a_{ij}|)} \\ &= \frac{(|a_{i,n-i+1}| - \sum_{j \neq n-i+1} |a_{ij}|) \sum_{j=n-i+2}^n |a_{ij}|}{|a_{i,n-i+1}|(|a_{i,n-i+1}| - \sum_{j=n-i+2}^n |a_{ij}|)}. \end{aligned}$$

因为 A 是严格次对角占优阵, 所以 $|a_{i,n-i+1}| - \sum_{j \neq n-i+1} |a_{ij}| > 0$, $|a_{i,n-i+1}| - \sum_{j=n-i+2}^n |a_{ij}| > 0$, 故上式大于 0, 从而 $M > N_2$.

(iv) 当 M, N_2 不同行时, 记与 N_2 同行为 $\bar{M}$, 则 $M > \bar{M} > N_2$. 综上所述, $N = \max\{N_1, N_2, 0\} \leq M$. 所以

$$\|x^{(k)} - x^*\|_\infty \leq \frac{N^k}{1-N} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|_\infty \leq \frac{M^k}{1-M} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|_\infty.$$

定理 3.2 设 $A = (a_{ij})_{n \times n}$ 为严格次对角占优矩阵, 则关于线性方程组 $Ax = b$ 的 Gauss-Seidel 迭代法和 SOR 迭代法, 有

$$\|x^{(k)} - x^*\|_\infty \leq \frac{N^k}{1-N} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|_\infty \leq \frac{P^k}{1-P} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|_\infty. \quad (13)$$

证 明 由定理 2.2 和定理 2.3 知,

$$N_1 = \frac{\sum_{j=1}^{n-1} |a_{1j}|}{|a_{1n}|}, N_2 = \max_{1 \leq i \leq n} \frac{\sum_{j=1}^{n-i} |a_{ij}|}{|a_{i,n-i+1}| - \sum_{j=n-i+2}^n |a_{ij}|}, P_1 = \frac{(1-\omega)|a_{1n}| + \omega \sum_{j=1}^{n-1} |a_{1j}|}{|a_{1n}|},$$

$$P_2 = \max_{1 < i \leq n} \frac{(1-\omega)|a_{i,n-i+1}| + \omega \sum_{j=1}^{n-i} |a_{ij}|}{|a_{i,n-i+1}| - \omega \sum_{j=n-i+2}^n |a_{ij}|}, P_3 = \frac{(1-\omega)|a_{n1}|}{|a_{n1}| - \omega \sum_{j=2}^n |a_{nj}|}.$$

(i) 比较 N_1, P_1 ,

$$P_1 - N_1 = \frac{(1-\omega)|a_{1n}| + \omega \sum_{j=1}^{n-1} |a_{1j}|}{|a_{1n}|} - \frac{\sum_{j=1}^{n-1} |a_{1j}|}{|a_{1n}|} = \frac{(1-\omega)(|a_{1n}| - \sum_{j=1}^{n-1} |a_{1j}|)}{|a_{1n}|} > 0,$$

故 $N_1 < P_1$.

(ii) 比较 N_2, P_2 . 若 N_2, P_2 同行,

$$P_2 - N_2 = \frac{(1-\omega)|a_{i,n-i+1}| + \omega \sum_{j=1}^{n-i} |a_{ij}|}{|a_{i,n-i+1}| - \omega \sum_{j=n-i+2}^n |a_{ij}|} - \frac{\sum_{j=1}^{n-i} |a_{ij}|}{|a_{i,n-i+1}| - \sum_{j=n-i+2}^n |a_{ij}|}$$

$$= \frac{(1-\omega)|a_{i,n-i+1}|^2 - (1-\omega)|a_{i,n-i+1}| \sum_{j=1}^{n-i} |a_{ij}| - (1-\omega)|a_{i,n-i+1}| \sum_{j=n-i+2}^n |a_{ij}|}{(|a_{i,n-i+1}| - \omega \sum_{j=n-i+2}^n |a_{ij}|)(|a_{i,n-i+1}| - \sum_{j=n-i+2}^n |a_{ij}|)}$$

$$= \frac{(1-\omega)|a_{i,n-i+1}|(|a_{i,n-i+1}| - \sum_{j=1}^{n-i} |a_{ij}| - \sum_{j=n-i+2}^n |a_{ij}|)}{(|a_{i,n-i+1}| - \omega \sum_{j=n-i+2}^n |a_{ij}|)(|a_{i,n-i+1}| - \sum_{j=n-i+2}^n |a_{ij}|)}.$$

因为 A 严格次对角占优, 故上式大于 0. 即 $N_2 < P_2$.

若 N_2, P_2 不同行, 设与 N_2 同行的为 $\hat{P}_1$, 则 $N_2 < \hat{P}_1$. 又因为 $\hat{P}_1 < P_2$, 所以 $N_2 < P_2$. 综上所述, $N = \max\{N_1, N_2, 0\} < \max\{P_1, P_2\} \leq \max\{P_1, P_2, P_3\} = P$. 所以

$$\|x^{(k)} - x^*\|_\infty \leq \frac{N^k}{1-N} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|_\infty \leq \frac{P^k}{1-P} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|_\infty.$$

4 小 结

本文证明了当线性方程组的系数矩阵严格次对角占优时, Jacobi、Gauss-Seidel 和 SOR 迭代法均收敛, 并给出了相应的误差估计. 通过比较三种迭代法的误差上界, 发现 Gauss-Seidel 迭代法的误差上界最小.

(下转第 55 页)

[参 考 文 献]

- [1] HAYMAN W. Meromorphic Function [M]. Oxford: Clarendon Press, 1964.
- [2] 杨乐. 值分布论及其新研究 [M]. 北京: 科学出版社, 1982.
- [3] WU S J. On the location of zeros of solutions of $f'' + Af = 0$ where $A(z)$ is entire [J]. Math Scand, 1994, 74(2): 293-312.
- [4] LAINE I, WU S J. Removable sets in the oscillation theory of complex differential equations [J]. Math Anal Appl, 1997, 214(1): 233-244.
- [5] GOLDBERG A A, OSTROVSKII I V. Distribution of Values of Meromorphic Functions [M]. Moscow: Izdat Nauk, 1970.
- [6] 蒋业阳, 陈宗焯. 非齐次线性微分方程解的增长性 [J]. 数学年刊, 2013, 34(3): 291-298.
- [7] LONG J R, WU P C, ZHANG Z. On the growth of solutions of second order linear differential equations with extremal coefficients [J]. Acta Mathematica Sinica (English Ser), 2013, 29(2): 365-372.
- [8] WU S J. Some results on entire functions of finite lower order [J]. Acta Math Sinica (English Ser), 1994, 10(2): 168-178.
- [9] HUANG Z G, WANG J. On the radial distribution of Julia sets of entire solutions of $f^{(n)} + A(z)f = 0$ [J]. Math Anal Appl, 2012, 387(2): 1106-1113.
- [10] 易才凤, 钟文波. 二阶微分方程 $f'' + Af' + Bf = 0$ 解的增长性 [J]. 江西师范大学学报(自然科学版). 2015, 39(4): 340-344.
- [11] ZHENG J H. Value Distribution of Meromorphic Functions [M]. Beijing: Tsinghua Univ Press, 2010.
- [12] ZHENG J H. On multiply-connected Fatou components in iteration of meromorphic functions [J]. Math Anal Appl, 2006, 313(1): 24-37.

(责任编辑: 林 磊)

(上接第 6 页)

[参 考 文 献]

- [1] 韩俊林, 刘建州. 广义对角占优矩阵和广义次对角占优矩阵等价条件的注记[J]. 商丘师范学院学报, 2002, 18(2): 46-48.
- [2] 陈思源. α -次对角占优矩阵与广义严格次对角占优矩阵的判定[J]. 石河子大学学报, 2006, 24(6): 786-789.
- [3] 张成毅, 李耀堂. 弱严格对角占优矩阵非奇异的判定条件[J]. 工程数学学报, 2006, 23(3): 505-510.
- [4] 崔琦, 宋岱才, 刘晶. Ostrowski 对角占优矩阵与非奇异 H -矩阵的判定[J]. 江西师范大学学报(自然科学版), 2007, 31(5): 497-499.
- [5] LI W, CHEN Y M. Some new two-sided bounds for determinants of diagonally dominant matrices[J]. Journal of Inequalities and Applications, 2012, 2012: 61-69.
- [6] 徐屹. 严格对角占优矩阵的迭代法[J]. 武汉理工大学学报, 2008, 30(9): 177-180.
- [7] 宋岱才, 魏晓丽, 赵晓颖. α 严格对角占优矩阵与迭代法的收敛性定理[J]. 辽宁石油化工大学学报, 2010, 30(1): 81-83.
- [8] HUANG R, LIU J Z, ZHU L. Accurate solutions of diagonally dominant tridiagonal linear systems[J]. BIT Numer Math, 2014, 54: 711-727.
- [9] 金玲玲, 苏岐芳. 几类特殊矩阵方程组的迭代解法收敛性分析[J]. 台州学院学报, 2015, 37(6): 8-16.
- [10] 胡家骥. 线性代数方程组的迭代解法[M]. 北京: 科学出版社, 1991.
- [11] 陈恒新. 关于 AOR 迭代法的研究[J]. 应用数学与计算数学学报, 2002, 16(1): 40-46.

(责任编辑: 林 磊)