文章编号: 1000-5641(2019)04-0001-10

一类代数上的弱可加交换映射

霍东华[1,2]

(1. 牡丹江师范学院 数学科学学院, 黑龙江 牡丹江 157012;
2. 哈尔滨工业大学 数学学院, 哈尔滨 150001)

摘要: 设 $\mathcal{A}$ 是一个有单位元 1 的代数. 称映射 $f:\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ 是一个弱可加映射, 如果满足对任意的 $x,y\in\mathcal{A}$, 存在 $t_{x,y},s_{x,y}\in\mathbb{F}$ 使得 $f(x+y)=t_{x,y}f(x)+s_{x,y}f(y)$ 成立. 本文证明了在一定的假设下, 如果 f 是交换映射, 则存在 $\lambda_0(x)\in\mathcal{A}$ 和一个从 $\mathcal{A}$ 到 $Z(\mathcal{A})$ 的映射 λ_1, 使得对所有的 $x\in\mathcal{A}$ 有 $f(x)=\lambda_0(x)x+\lambda_1(x)$. 作为应用, 刻画了 $M_n(\mathbb{F})$ 上一类交换的弱可加映射.

关键词: 代数; 交换映射; 弱可加映射
中图分类号: O152.2 **文献标志码**: A **DOI:** 10.3969/j.issn.1000-5641.2019.04.001

Characterization of commuting weakly additive maps on a class of algebras

HUO Dong-hua[1,2]

(1. *School of Mathematical Sciences*, *Mudanjiang Normal University*, *Mudanjiang Heilongjiang* 157012, *China*;
2. *School of Mathematics*, *Harbin Institute of Technology*, *Harbin* 150001, *China*)

Abstract: Let $\mathcal{A}$ be an algebra with unit 1. A map $f:\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ is a weakly additive map if for every $x,y\in\mathcal{A}$ there exist $t_{x,y},s_{x,y}\in\mathbb{F}$ such that $f(x+y)=t_{x,y}f(x)+s_{x,y}f(y)$. We prove that under some conditions, if f is a commuting map, then there exists $\lambda_0(x)\in\mathcal{A}$ and a map λ_1 from $\mathcal{A}$ into $Z(\mathcal{A})$ such that $f(x)=\lambda_0(x)x+\lambda_1(x)$ for all $x\in\mathcal{A}$. As an application, a class of commuting weakly additive maps on $M_n(\mathbb{F})$ are characterized.

Keywords: algebras; commuting maps; weakly additive maps

0 引 言

设 $\mathcal{A}$ 是定义在域 $\mathbb{F}$ ($\mathrm{char}\,\mathbb{F}=0$) 上的有单位元 1 的结合代数. 任取 $a,b\in\mathcal{A}$, 记 $[a,b]=ab-ba$. $\mathcal{A}$ 的中心记为 $Z(\mathcal{A})$ (其中 $Z(\mathcal{A})=\{z\in\mathcal{A}:[z,a]=0,\forall a\in\mathcal{A}\}$). 映射 $f:\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ 是弱可加映射是指对任意的 $x,y\in\mathcal{A}$, 都存在 $t_{x,y},s_{x,y}\in\mathbb{F}$ 使得 $f(x+y)=t_{x,y}f(x)+s_{x,y}f(y)$, 这里 $t_{x,y},s_{x,y}$ 是和 x,y 有关的数. 例如, 设 $M_2(\mathbb{F})$ 是定义在域 $\mathbb{F}$ 上的满足普通的矩阵加法和

收稿日期: 2018-07-27
基金项目: 黑龙江省省属高等学校基本科研业务费重点项目 (1354ZD007); 牡丹江师范学院博士科研启动基金 (MNUB201512)
作者简介: 霍东华, 女, 博士, 副教授, 研究方向为代数学. E-mail: i94donghua@163.com.

矩阵乘法的矩阵代数, 映射 $f: M_2(\mathbb{F}) \to M_2(\mathbb{F})$ 定义为 $f(x) = \|x\|x$ (这里 $\|x\|$ 是任意一种矩阵范数), 则 f 是弱可加映射. 映射 $f: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ 是交换的是指对所有的 $a \in \mathcal{A}$ 有 $[f(a), a] = 0$. 如果交换映射 f 的形式是 $f(a) = \lambda a + \mu(a)$, 这里 $\lambda \in Z(\mathcal{A})$ 并且 $\mu: \mathcal{A} \to Z(\mathcal{A})$ 是一个映射, 则 f 被称为是正常的.

通常交换映射主要研究的是映射的形式，然而关于交换性的研究最初是关于交换环的. 环 $\mathcal{R}$ 是交换的是指任意的 $a, b \in \mathcal{R}$ 有 $ab = ba$ 成立. 交换环及相关的中心映射的研究要追溯到 1957 年 E. C. Posner[1]证明了如下结论: 如果一个素环 $\mathcal{R}$ 有非零中心导子, 则 $\mathcal{R}$ 必是交换的. 这个结果引起了人们对可加的交换映射的研究兴趣. M. Brešar[2]证明了如果 F 是一个从 von Neumann 代数 M 到自身的可加的交换映射, 则 F 是正常的. 不久, M. Brešar[3]给出了素环上的可加交换映射的刻画, 后来这个结果被研究者推广到了其他的环和代数上. 关于交换映射的更多内容可参考文献 [4-9].

映射 $f: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ 是 k-交换的是指对所有的 $a \in \mathcal{A}$ 有 $[f(a), a]_k = 0$ (这里 $[f(a), a]_k = [\cdots[[f(a), a], a], \cdots, a]$, 其中 a 有 k 个). 映射 $f: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ 是中心映射是指对所有的 $a \in \mathcal{A}$ 有 $[f(a), a] \in Z(\mathcal{A})$. 映射 $f: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ 是 $*$-中心映射是指对所有的 $a \in \mathcal{A}$ 有 $[f(a), a^*] \in Z(\mathcal{A})$. 最近, 文献 [10] 研究得出在某些三角代数上的 k-交换映射是正常的. 李岩波等[11]讨论了广义矩阵代数上的半中心映射, 并通过复杂的计算刻画了它的一般形式. 齐霄霏等[12]刻画了在某些假设下, 每一个可加映射 $f: \mathcal{R} \to \mathcal{R}$ 是 k-交换映射当且仅当对所有的 $x \in \mathcal{R}$ 都有 $f(x) = \alpha x + h(x)$, 这里 $\alpha \in Z(\mathcal{R})$ 并且 h 是一个从 $\mathcal{R}$ 到 $Z(\mathcal{R})$ 的可加映射. Shakir Ali[13]描述了带有对合的素环上的任意一个可加交换映射是 $*$-中心映射.

下面举一个明显的交换映射的例子[14]:

$$f(x) = \lambda_0(x)x^n + \lambda_1(x)x^{n-1} + \cdots + \lambda_{n-1}(x)x + \lambda_n(x),\ \lambda_i: \mathcal{A} \to Z(\mathcal{A}).$$

然而, 这个例子不能说明交换映射就一定是这种形式, 因此需要添加一些限制, 如文献 [15] 证明了在某些假设下, 如果 q 是双可加交换映射的迹, 则 $q(x) = \lambda x^2 + \mu(x)x + v(x)$ (这里 λ, $\mu(x)$, $v(x)$ 都属于环的中心). 一个自然的问题是什么形式的交换映射满足

$$f(x) = \lambda_0(x)x + \lambda_1(x),\ \lambda_i: \mathcal{A} \to Z(\mathcal{A}), i = 0, 1.$$

本文的目的是考虑在某些假设下, 如果弱可加映射 $f: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ 是交换映射, 则对所有的 $x \in \mathcal{A}$ 是否存在 $\lambda_0(x) \in \mathcal{A}$ 和一个从 $\mathcal{A}$ 到 $Z(\mathcal{A})$ 的映射 λ_1 使得 $f(x) = \lambda_0(x)x + \lambda_1(x)$. 由于 $t_{x,y}, s_{x,y}$ 是和 x, y 有关的数, 所以这里不能证明 $\lambda_0(x) \in Z(\mathcal{A})$. 本文的主要结论如下.

定理 0.1 设 $\mathcal{A}$ 是域 $(\mathrm{char}\,\mathbb{F} = 0)$ 上含有单位元 1 和幂等元 e 的结合代数, 同时满足 $a\mathcal{A}e \neq 0, a\mathcal{A}(1-e) \neq 0, \forall 0 \neq a \in \mathcal{A}$. 若 $f: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ 是一个弱可加交换映射, 且对任意的 $x, y \in \mathcal{A}$, 满足

(a) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

(b) x, y 是线性相关的 $\Leftrightarrow f(x), f(y)$ 是线性相关的.

则存在 $\lambda_0(x) \in \mathcal{A}$ 和 $\lambda_1(x) \in Z(\mathcal{A})$ 使得 $f(x) = \lambda_0(x)x + \lambda_1(x)$ 成立.

1 主要结果的证明

由条件可知 $e \neq 0, 1$, 记 $e_1 = e$, $e_2 = 1 - e$. 则 $\mathcal{A}$ 可以写成 $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{11} + \mathcal{A}_{12} + \mathcal{A}_{21} + \mathcal{A}_{22}$, 这里 $\mathcal{A}_{ij} = e_i\mathcal{A}e_j\ (i, j = 1, 2)$. 于是任取 $A \in \mathcal{A}$ 有 $A = \sum_{i,j=1}^{2} A_{ij}$ (这里 $A_{ij} \in \mathcal{A}_{ij}$).

引理 1.1[11] 设 $\mathcal{R}$ 是一个含有单位元 1 和幂等元 e 的环, 并且 $\mathcal{R}$ 满足 $a\mathcal{R}e=\{0\}\Rightarrow a=0$, $a\mathcal{R}(1-e)=\{0\}\Rightarrow a=0$, 则 $\mathcal{R}$ 的中心是

$$Z(\mathcal{R})=\{z_{11}+z_{22}:\ z_{11}\in\mathcal{R}_{11},\ z_{22}\in\mathcal{R}_{22},\ z_{11}a_{12}=a_{12}z_{22},\ a_{21}z_{11}=z_{22}a_{21},\forall\, a_{12}\in R_{12},\ a_{21}\in R_{21}\}.$$

引理 1.2[16] 设 $\mathcal{R}'$ 是一个含有单位元 1 和幂等元 e 的环, 并且 $\mathcal{R}'$ 满足 $a\mathcal{R}'e=\{0\}\Rightarrow a=0$ 和 $a\mathcal{R}'(1-e)=\{0\}\Rightarrow a=0$. 任取 $a\in\mathcal{R}'$, 如果对任意的 $x\in\mathcal{R}'$ 有 $exeae=eaexe$, 则存在 $\lambda\in Z(\mathcal{R}')$ 使得 $eae=\lambda e$.

以下引理都是在定理 0.1 的前提条件下提出的, 下面将不再进行说明.

引理 1.3 任取 $x,y\in\mathcal{A}$, 则存在全不为零的 $t_{x,y},s_{x,y}\in\mathbb{F}$ 使得 $f(x+y)=t_{x,y}f(x)+s_{x,y}f(y)$.

证 明 任取 $x,y\in\mathcal{A}$, 我们来分情况讨论.

(i) 如果 x, y 中至少有一个为零, 不妨设 $x=0$. 由于 $f(x)=0\Leftrightarrow x=0$, 所以 $f(0)=0$ 并且

$$f(x+y)=f(y)=f(x)+f(y).$$

(ii) 如果 x, y 全不为零, 设 $t_{x,y},s_{x,y}\in\mathbb{F}$ 使得

$$f(x+y)=t_{x,y}f(x)+s_{x,y}f(y).$$

如果 x,y 是线性无关的, 则 $x+y\neq 0$, 所以 $f(x+y)\neq 0$. 于是 $t_{x,y},s_{x,y}$ 不全为零. 若 $t_{x,y},s_{x,y}$ 中有一个为零, 不妨设

$$f(x+y)=t_{x,y}f(x),\ t_{x,y}\neq 0,$$

则 $f(x+y),f(x)$ 是线性相关的, 从而 $x+y,x$ 是线性相关的, 与 x,y 线性无关矛盾, 因此 $t_{x,y},s_{x,y}$ 全不为零.

如果 x,y 是线性相关的, 则 $f(x),f(y)$ 是线性相关的, 于是存在不全为零的 $a,b\in\mathbb{F}$ 使得

$$0=af(x)+bf(y).$$

由于 $f(x)\neq 0$, $f(y)\neq 0$, 所以 a,b 全不为零. 于是对任意的 $p\in\mathbb{F}$ 都有

$$f(x+y)=(t_{x,y}+ap)f(x)+(s_{x,y}+bp)f(y).$$

因为 $\mathrm{char}(\mathbb{F})=0$, 则存在 $p\in\mathbb{F}$ 使得 $t_{x,y}+ap\neq 0$ 和 $s_{x,y}+bp\neq 0$. 因此可以取 $t_{x,y}+ap,s_{x,y}+bp$ 为新的 $t_{x,y},s_{x,y}$, 于是 $t_{x,y},s_{x,y}$ 全不为零.

引理 1.4 $f(1)\in Z(\mathcal{A})$, $f(e_i)\in\mathcal{A}_{11}+\mathcal{A}_{22}\ (i=1,2)$. 并且存在 $z_i\in Z(\mathcal{A})$ 使得 $e_if(1)e_i=z_ie_i$.

证 明 任取 $a\in\mathcal{A}$, 则 $[f(a+1),a+1]=0$. 由定义可知存在 $t_{a,1},s_{a,1}\in\mathbb{F}$, 使得

$$[f(a+1),a+1]=[t_{a,1}f(a)+s_{a,1}f(1),a+1]=s_{a,1}[f(1),a]=0.$$

因为 $s_{a,1}\neq 0$, 所以 $[f(1),a]=0$, 因此 $f(1)\in Z(\mathcal{A})$. 任取 $a_{11}\in\mathcal{A}_{11}$ 和 $a_{22}\in\mathcal{A}_{22}$, 有

$$[f(1),a_{11}]=[e_1f(1)e_1,a_{11}]=0$$

和

$$[f(1), a_{22}] = [e_2 f(1) e_2, a_{22}] = 0$$

成立. 于是 $e_1 f(1) e_1 \in Z(\mathcal{A}_{11})$ 和 $e_2 f(1) e_2 \in Z(\mathcal{A}_{22})$. 即对任意的 $a \in \mathcal{A}$, 有

$$e_1 f(1) e_1 a e_1 = e_1 a e_1 f(1) e_1$$

和

$$e_2 f(1) e_2 a e_2 = e_2 a e_2 f(1) e_2.$$

由引理 1.2, 存在 $z_1, z_2 \in Z(\mathcal{A})$, 使得 $e_1 f(1) e_1 = z_1 e_1$ 和 $e_2 f(1) e_2 = z_2 e_2$ 成立.

因为 $[f(1), e_1] = [f(e_1 + e_2), e_1] = 0$, $[f(e_1), e_1] = 0$, 则 $[f(e_2), e_1] = 0$, 所以 $f(e_i) \in \mathcal{A}_{11} + \mathcal{A}_{22}$.

引理 1.5 任取 $a_{ii} \in \mathcal{A}_{ii}$, 则 $f(a_{ii}) \in \mathcal{A}_{11} + \mathcal{A}_{22}$, $[e_i f(a_{ii}) e_i, a_{ii}] = 0$. 并且存在弱可加映射 $f_{ii} : \mathcal{A}_{ii} \to Z(\mathcal{A})$, 使得 $e_j f(a_{ii}) e_j = f_{ii}(a_{ii}) e_j$, $1 \leqslant i \neq j \leqslant 2$. 特别地, $e_2 f(e_1) e_2 = f_{11}(e_1) e_2$ 和 $e_1 f(e_2) e_1 = f_{22}(e_2) e_1$ 成立.

证　明 任取 $a_{11} \in \mathcal{A}_{11}$, 则

$$\begin{aligned} 0 = [f(a_{11}), a_{11}] &= [e_1 f(a_{11}) e_1 + e_1 f(a_{11}) e_2 + e_2 f(a_{11}) e_1 + e_2 f(a_{11}) e_2, a_{11}] \\ &= [e_1 f(a_{11}) e_1, a_{11}] + [e_1 f(a_{11}) e_2, a_{11}] + [e_2 f(a_{11}) e_1, a_{11}]. \end{aligned}$$

注意到

$$[e_1 f(a_{11}) e_1, a_{11}] \in \mathcal{A}_{11},\ [e_1 f(a_{11}) e_2, a_{11}] \in \mathcal{A}_{12},\ [e_2 f(a_{11}) e_1, a_{11}] \in \mathcal{A}_{21}.$$

因此, 对任意的 $a_{11} \in \mathcal{A}_{11}$, 有

$$[e_1 f(a_{11}) e_1, a_{11}] = [e_1 f(a_{11}) e_2, a_{11}] = [e_2 f(a_{11}) e_1, a_{11}] = 0.$$

由于

$$[e_1 f(a_{11}) e_2, a_{11}] = 0, \forall\, a_{11} \in \mathcal{A}_{11},$$

计算得

$$a_{11} e_1 f(a_{11}) e_2 = 0, \forall a_{11} \in \mathcal{A}_{11},$$

因此

$$(a_{11} + e_1) e_1 f(a_{11} + e_1) e_2 = 0, \forall a_{11} \in \mathcal{A}_{11}.$$

由引理 1.4 得 $e_1 f(e_1) e_2 = 0$, 所以 $e_1 f(a_{11}) e_2 = 0$. 又由于

$$[e_2 f(a_{11}) e_1, a_{11}] = e_2 f(a_{11}) e_1 a_{11} = 0,$$

类似地, 有

$$e_2 f(a_{11}) e_1 = 0, \forall a_{11} \in \mathcal{A}_{11}.$$

因此, 对任意的 $a_{11} \in \mathcal{A}_{11}$, 有

$$f(a_{11}) \in \mathcal{A}_{11} + \mathcal{A}_{22},\ [e_1 f(a_{11}) e_1, a_{11}] = 0.$$

同理, 对任意的 $a_{22}\in\mathcal{A}_{22}$, 有

$$f(a_{22})\in\mathcal{A}_{11}+\mathcal{A}_{22},\ [e_2f(a_{22})e_2,a_{22}]=0.$$

下面考虑 $e_2f(a_{11})e_2$ 和 $e_1f(a_{22})e_1$.

因为 $[f(a_{11}+a_{22}),a_{11}+a_{22}]=0$, 所以存在非零的 $t_{a_{11},a_{22}},s_{a_{11},a_{22}}\in\mathbb{F}$, 使得

$$t_{a_{11},a_{22}}[e_2f(a_{11})e_2,a_{22}]+s_{a_{11},a_{22}}[e_1f(a_{22})e_1,a_{11}]=0.$$

于是对任意的 $a_{11}\in\mathcal{A}_{11}$, $a_{22}\in\mathcal{A}_{22}$, 有

$$t_{a_{11},a_{22}}[e_2f(a_{11})e_2,a_{22}]=s_{a_{11},a_{22}}[e_1f(a_{22})e_1,a_{11}]=0.$$

由于 $t_{a_{11},a_{22}}\neq 0$, $s_{a_{11},a_{22}}\neq 0$, 所以 $e_1f(a_{22})e_1\in Z(\mathcal{A}_{11})$, 并且 $e_2f(a_{11})e_2\in Z(\mathcal{A}_{22})$. 因此由引理 1.2, 存在 $f_{11}(a_{11})$, $f_{22}(a_{22})\in Z(\mathcal{A})$, 使得 $e_2f(a_{11})e_2=f_{11}(a_{11})e_2$ 和 $e_1f(a_{22})e_1=f_{22}(a_{22})e_1$ 成立.

实际上, 由 f 的弱可加性, 任取 $a_{ii},b_{ii}\in\mathcal{A}_{ii}$ $(i=1,2)$, 存在非零的 $t_{a_{ii},b_{ii}},s_{a_{ii},b_{ii}}\in\mathbb{F}$, 使得

$$f_{ii}(a_{ii}+b_{ii})e_j=t_{a_{ii},b_{ii}}f_{ii}(a_{ii})e_j+s_{a_{ii},b_{ii}}f_{ii}(b_{ii})e_j, \tag{1}$$

则

$$(f_{ii}(a_{ii}+b_{ii})-t_{a_{ii},b_{ii}}f_{ii}(a_{ii})-s_{a_{ii},b_{ii}}f_{ii}(b_{ii}))\mathcal{A}e_j=0.$$

由 $\mathcal{A}$ 的假设可得

$$f_{ii}(a_{ii}+b_{ii})=t_{a_{ii},b_{ii}}f_{ii}(a_{ii})+s_{a_{ii},b_{ii}}f_{ii}(b_{ii}),$$

所以 f_{ii} 是弱可加映射.

引理 1.6 任取 $a_{ij}\in\mathcal{A}_{ij}$ $(1\leqslant i\neq j\leqslant 2)$, 则下列结论成立:

(1) $e_jf(a_{ij})e_i=0$;

(2) $e_if(a_{ij})e_j=\frac{t_{e_i,a_{ij}}}{s_{e_i,a_{ij}}}(e_if(e_i)e_ia_{ij}-a_{ij}e_jf(e_i)e_j)=\frac{t_{e_i,a_{ij}}}{s_{e_i,a_{ij}}}(e_if(e_i)e_ia_{ij}-f_{ii}(e_i)e_ia_{ij})=\frac{t_{e_j,a_{ij}}}{s_{e_j,a_{ij}}}(a_{ij}e_jf(e_j)e_j-e_if(e_j)e_ia_{ij})=\frac{t_{e_j,a_{ij}}}{s_{e_j,a_{ij}}}(a_{ij}e_jf(e_j)e_j-f_{jj}(e_j)e_ia_{ij})$, 这里 $t_{e_i,a_{ij}},s_{e_i,a_{ij}}$, $t_{e_j,a_{ij}},s_{e_j,a_{ij}}\in\mathbb{F}$;

(3) $e_if(a_{ij})e_ia_{ij}=a_{ij}e_jf(a_{ij})e_j$;

(4) 存在弱可加映射 $f_{ij},g_{ij}:\mathcal{A}\to Z(\mathcal{A})$, 使得 $e_if(a_{ij})e_i=f_{ij}(a_{ij})e_i$ 和 $e_jf(a_{ij})e_j=g_{ij}(a_{ij})e_j$ 成立.

证　明 这里只证明 $(i,j)=(1,2)$ 的情形, 另一种 $(i,j)=(2,1)$ 的情形类似.

任取 $a_{12}\in\mathcal{A}_{12}$, 则 $[f(e_1+a_{12}),e_1+a_{12}]=0$. 因此存在非零的 $t_{e_1,a_{12}},s_{e_1,a_{12}}\in\mathbb{F}$, 使得

$$\begin{aligned}&[f(e_1+a_{12}),e_1+a_{12}]\\&=t_{e_1,a_{12}}[f(e_1),a_{12}]+s_{e_1,a_{12}}[f(a_{12}),e_1]\\&=t_{e_1,a_{12}}e_1f(e_1)e_1a_{12}-t_{e_1,a_{12}}a_{12}e_2f(e_1)e_2+s_{e_1,a_{12}}e_2f(a_{12})e_1-s_{e_1,a_{12}}e_1f(a_{12})e_2.\end{aligned} \tag{2}$$

因此 $e_2f(a_{12})e_1=0$. 所以结论 (1) 成立, 并且

$$\begin{aligned}e_1f(a_{12})e_2&=\frac{t_{e_1,a_{12}}}{s_{e_1,a_{12}}}(e_1f(e_1)e_1a_{12}-a_{12}e_2f(e_1)e_2)\\&=\frac{t_{e_1,a_{12}}}{s_{e_1,a_{12}}}(e_1f(e_1)e_1a_{12}-f_{11}(e_1)e_1a_{12}).\end{aligned}$$

同理, 由等式 $[f(e_2+a_{12}),e_2+a_{12}]=0$ 可得

$$\begin{aligned}e_1f(a_{12})e_2&=\frac{t_{e_2,a_{12}}}{s_{e_2,a_{12}}}(a_{12}e_2f(e_2)e_2-e_1f(e_2)e_1a_{12})\\&=\frac{t_{e_2,a_{12}}}{s_{e_2,a_{12}}}(a_{12}e_2f(e_2)e_2-f_{22}(e_2)e_1a_{12}).\end{aligned}$$

因为 $[f(a_{12}),a_{12}]=0$, 所以 $e_1f(a_{12})e_1a_{12}=a_{12}e_2f(a_{12})e_2$. 因此结论 (2) 和 (3) 成立.

下证结论 (4). 任取 $a_{11}\in\mathcal{A}_{11}$, 则 $[f(a_{11}+a_{12}),a_{11}+a_{12}]=0$. 由引理 1.5 和结论 (1), 可得存在非零 $s_{a_{11},a_{12}}\in\mathbb{F}$, 使得

$$[f(a_{11}+a_{12}),a_{11}+a_{12}]=[s_{a_{11},a_{12}}e_1f(a_{12})e_1,a_{11}]+g(a_{11},a_{12}),$$

这里

$$[s_{a_{11},a_{12}}e_1f(a_{12})e_1,a_{11}]\in\mathcal{A}_{11},\ g(a_{11},a_{12})\in\mathcal{A}_{12}.$$

因此, 对任意的 $a_{11}\in\mathcal{A}_{11}$ 有 $[e_1f(a_{12})e_1,a_{11}]=0$ 成立, 所以 $e_1f(a_{12})e_1\in Z(\mathcal{A}_{11})$.

类似地, 任取 $a_{22}\in\mathcal{A}_{22}$, 由等式 $[f(a_{22}+a_{12}),a_{22}+a_{12}]=0$ 可以证明 $e_2f(a_{12})e_2\in Z(\mathcal{A}_{22})$. 再由引理 1.2, 存在 $f_{12}(a_{12}),g_{12}(a_{12})\in Z(\mathcal{A})$, 使得

$$e_1f(a_{12})e_1=f_{12}(a_{12})e_1,\ e_2f(a_{12})e_2=g_{12}(a_{12})e_2.$$

同理, 由引理 1.5 可得 f_{ij},g_{ij} 是弱可加的, 因此结论 (4) 成立.

引理 1.7 任取 $a_{12}\in\mathcal{A}_{12}$, $a_{21}\in\mathcal{A}_{21}$, 则

$$a_{21}e_1f(a_{12})e_1=e_2f(a_{12})e_2a_{21}$$

和

$$a_{12}e_2f(a_{21})e_2=e_1f(a_{21})e_1a_{12}$$

成立.

证 明 任取 $a_{12}\in\mathcal{A}_{12}$, $a_{21}\in\mathcal{A}_{21}$, 则 $[f(a_{12}+a_{21}),a_{12}+a_{21}]=0$. 因此由引理 1.6, 存在非零 $t_{a_{12},a_{21}},s_{a_{12},a_{21}}\in\mathbb{F}$, 使得

$$\begin{aligned}&[f(a_{12}+a_{21}),a_{12}+a_{21}]\\=&\,t_{a_{12},a_{21}}(-a_{21}e_1f(a_{12})e_1-a_{21}e_1f(a_{12})e_2+e_1f(a_{12})e_2a_{21}+e_2f(a_{12})e_2a_{21})\\&+s_{a_{12},a_{21}}(e_1f(a_{21})e_1a_{12}+e_2f(a_{21})e_1a_{12}-a_{12}e_2f(a_{21})e_1-a_{12}e_2f(a_{21})e_2)\\=&\,(t_{a_{12},a_{21}}e_1f(a_{12})e_2a_{21}-s_{a_{12},a_{21}}a_{12}e_2f(a_{21})e_1)+s_{a_{12},a_{21}}(e_1f(a_{21})e_1a_{12}-a_{12}e_2f(a_{21})e_2)\\&+t_{a_{12},a_{21}}(-a_{21}e_1f(a_{12})e_1+e_2f(a_{12})e_2a_{21})+(s_{a_{12},a_{21}}e_2f(a_{21})e_1a_{12}-t_{a_{12},a_{21}}a_{21}e_1f(a_{12})e_2).\end{aligned}$$

于是,

$$a_{21}e_1f(a_{12})e_1=e_2f(a_{12})e_2a_{21},\ a_{12}e_2f(a_{21})e_2=e_1f(a_{21})e_1a_{12}.$$

引理 1.8 任取 $a_{ij}\in\mathcal{A}_{ij}$, 则 $e_if(a_{ij})e_i+e_jf(a_{ij})e_j\in Z(\mathcal{A})\ (1\leqslant i\neq j\leqslant 2)$.

证 明 设 $1\leqslant i\neq j\leqslant 2$, 任取 $a_{ij}\in\mathcal{A}_{ij}$, $a_{ji}\in\mathcal{A}_{ji}$, 由引理 1.6 (4) 得到

$$e_if(a_{ij})e_i=f_{ij}(a_{ij})e_i,\ e_jf(a_{ij})e_j=g_{ij}(a_{ij})e_j,$$

这里 $f_{ij}(a_{ij}), g_{ij}(a_{ij}) \in Z(\mathcal{A})$. 由此式和引理 1.7 得到

$$a_{ji}f_{ij}(a_{ij})e_i = g_{ij}(a_{ij})e_j a_{ji}, \forall\, a_{ji} \in \mathcal{A}_{ji},$$

即

$$(g_{ij}(a_{ij})e_j - f_{ij}(a_{ij})e_j)ae_i = 0, \forall\, a \in \mathcal{A}.$$

再由 $\mathcal{A}$ 的假设, 有 $g_{ij}(a_{ij})e_j = f_{ij}(a_{ij})e_j$, 因此

$$e_i f(a_{ij})e_i + e_j f(a_{ij})e_j = f_{ij}(a_{ij})e_i + g_{ij}(a_{ij})e_j = f_{ij}(a_{ij}) \in Z(\mathcal{A}).$$

引理 1.9　任取 $a_{11} \in \mathcal{A}_{11}$, 则

$$e_1 f(a_{11})e_1 = f_{11}(a_{11})e_1 + \frac{s_{a_{11},a_{12}}t_{e_1,a_{12}}}{t_{a_{11},a_{12}}s_{e_1,a_{12}}}(e_1 f(e_1)e_1 - f_{11}(e_1)e_1)a_{11}.$$

证　明　任取 $a_{11} \in \mathcal{A}_{11}$, $a_{12} \in \mathcal{A}_{12}$, 则 $[f(a_{11}+a_{12}), a_{11}+a_{12}] = 0$. 由引理 1.5 和引理 1.6, 存在非零 $t_{a_{11},a_{12}}, s_{a_{11},a_{12}} \in \mathbb{F}$, 使得

$$\begin{aligned}&[f(a_{11}+a_{12}), a_{11}+a_{12}]\\ &= t_{a_{11},a_{12}}e_1 f(a_{11})e_1 a_{12} - t_{a_{11},a_{12}}a_{12}e_2 f(a_{11})e_2 - s_{a_{11},a_{12}}a_{11}e_1 f(a_{12})e_2.\end{aligned}$$

易知

$$\begin{aligned}e_i f(a_{ij})e_j &= \frac{t_{e_i,a_{ij}}}{s_{e_i,a_{ij}}}(e_i f(e_i)e_i a_{ij} - a_{ij}e_j f(e_i)e_j)\\ &= \frac{t_{e_i,a_{ij}}}{s_{e_i,a_{ij}}}(e_i f(e_i)e_i a_{ij} - f_{ii}(e_i)e_j a_{ij}),\end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}&t_{a_{11},a_{12}}e_1 f(a_{11})e_1 a_{12} - t_{a_{11},a_{12}}a_{12}e_2 f(a_{11})e_2\\ &\quad - s_{a_{11},a_{12}}a_{11}\Big(\frac{t_{e_1,a_{12}}}{s_{e_1,a_{12}}}(e_1 f(e_1)e_1 a_{12} - a_{12}e_2 f(e_1)e_2)\Big) = 0.\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}&\Big(t_{a_{11},a_{12}}e_1 f(a_{11})e_1 - t_{a_{11},a_{12}}f_{11}(a_{11})e_1 - s_{a_{11},a_{12}}\frac{t_{e_1,a_{12}}}{s_{e_1,a_{12}}}a_{11}e_1 f(e_1)e_1\\ &\quad + s_{a_{11},a_{12}}\frac{t_{e_1,a_{12}}}{s_{e_1,a_{12}}}a_{11}f_{11}(e_1)e_1\Big)e_1 a e_2 = 0.\end{aligned}$$

利用假设得

$$e_1 f(a_{11})e_1 = f_{11}(a_{11})e_1 + \frac{s_{a_{11},a_{12}}t_{e_1,a_{12}}}{t_{a_{11},a_{12}}s_{e_1,a_{12}}}(e_1 f(e_1)e_1 - f_{11}(e_1)e_1)a_{11}.$$

类似地, 利用等式 $[f(a_{22}+a_{21}), a_{22}+a_{21}] = 0$ 得, 存在非零 $t_{a_{22},a_{21}}, s_{a_{22},a_{21}} \in \mathbb{F}$, 使得如下结论成立.

引理 1.10 任取 $a_{22}\in\mathcal{A}_{22}$, 则

$$e_2f(a_{22})e_2=f_{22}(a_{22})e_2+\frac{s_{a_{22},a_{21}}t_{e_2,a_{21}}}{t_{a_{22},a_{21}}s_{e_2,a_{21}}}(e_2f(e_2)e_2-f_{22}(e_2)e_2)a_{22}.$$

下面证明定理 0.1.

定理 0.1 的证明 任取 $x=a_{11}+a_{12}+a_{21}+a_{22}\in\mathcal{A}$, 由 f 的定义, 存在非零常数 $u,v\in\mathbb{F}$, 使得定理 0.1 的

$$\begin{aligned}f(x)&=f(a_{11}+a_{12}+a_{21}+a_{22})\\&=uf(a_{11}+a_{12})+vf(a_{21}+a_{22})\\&=ut_{a_{11},a_{12}}f(a_{11})+us_{a_{11},a_{12}}f(a_{12})+vs_{a_{22},a_{21}}f(a_{21})+vt_{a_{22},a_{21}}f(a_{22}).\end{aligned}$$

设

$$\lambda_0(x)=\alpha(e_1f(e_1)e_1-f_{11}(e_1)e_1)+\beta(e_2f(e_2)e_2-f_{22}(e_2)e_2),$$

其中

$$\alpha=us_{a_{11},a_{12}}\frac{t_{e_1,a_{12}}}{s_{e_1,a_{12}}},\ \beta=vs_{a_{22},a_{21}}\frac{t_{e_2,a_{21}}}{s_{e_2,a_{21}}}.$$

令

$$\lambda_1(x)=f(x)-\lambda_0(x)x,$$

显然 $\lambda_1(x)$ 是 $\mathcal{A}$ 上的映射. 因此, 只须验证, 对所有的 $x\in\mathcal{A}$, 有 $\lambda_1(x)\in Z(\mathcal{A})$. 实际上, 由引理 1.5 和引理 1.6 可得

$$\begin{aligned}\lambda_1(x)=&f(a_{11}+a_{12}+a_{21}+a_{22})-\lambda_0(x)(a_{11}+a_{12}+a_{21}+a_{22})\\=&ut_{a_{11},a_{12}}f(a_{11})+us_{a_{11},a_{12}}f(a_{12})+vs_{a_{22},a_{21}}f(a_{21})+vt_{a_{22},a_{21}}f(a_{22})-(\alpha(e_1f(e_1)e_1\\&-f_{11}(e_1)e_1)+\beta(e_2f(e_2)e_2-f_{22}(e_2)e_2))(a_{11}+a_{12}+a_{21}+a_{22})\\=&ut_{a_{11},a_{12}}e_1f(a_{11})e_1+ut_{a_{11},a_{12}}e_2f(a_{11})e_2+vt_{a_{22},a_{21}}e_1f(a_{22})e_1+vt_{a_{22},a_{21}}e_2f(a_{22})e_2\\&+us_{a_{11},a_{12}}e_1f(a_{12})e_1+us_{a_{11},a_{12}}e_2f(a_{12})e_2+vs_{a_{22},a_{21}}e_1f(a_{21})e_1+vs_{a_{22},a_{21}}e_2f(a_{21})e_2\\&+us_{a_{11},a_{12}}e_1f(a_{12})e_2+vs_{a_{22},a_{21}}e_2f(a_{21})e_1-\alpha(e_1f(e_1)e_1-f_{11}(e_1)e_1)a_{11}\\&-\alpha(e_1f(e_1)e_1-f_{11}(e_1)e_1)a_{12}-\beta(e_2f(e_2)e_2-f_{22}(e_2)e_2)a_{21}-\beta(e_2f(e_2)e_2-f_{22}(e_2)e_2)a_{22}\\=&ut_{a_{11},a_{12}}e_1f(a_{11})e_1+ut_{a_{11},a_{12}}e_2f(a_{11})e_2+vt_{a_{22},a_{21}}e_1f(a_{22})e_1+vt_{a_{22},a_{21}}e_2f(a_{22})e_2\\&+us_{a_{11},a_{12}}e_1f(a_{12})e_1+us_{a_{11},a_{12}}e_2f(a_{12})e_2+vs_{a_{22},a_{21}}e_1f(a_{21})e_1+vt_{a_{22},a_{21}}e_2f(a_{21})e_2\\&+\Big(us_{a_{11},a_{12}}\frac{t_{e_1,a_{12}}}{s_{e_1,a_{12}}}-\alpha\Big)(e_1f(e_1)e_1-f_{11}(e_1)e_1)a_{12}+\Big(vs_{a_{22},a_{21}}\frac{t_{e_2,a_{21}}}{s_{e_2,a_{21}}}-\beta\Big)(e_2f(e_2)e_2\\&-f_{22}(e_2)e_2)a_{21}-\alpha(e_1f(e_1)e_1-f_{11}(e_1)e_1)a_{11}-\beta(e_2f(e_2)e_2-f_{22}(e_2)e_2)a_{22}.\end{aligned}$$

由引理 1.8 得到

$$us_{a_{11},a_{12}}e_1f(a_{12})e_1+us_{a_{11},a_{12}}e_2f(a_{12})e_2+vs_{a_{22},a_{21}}e_1f(a_{21})e_1+vs_{a_{22},a_{21}}e_2f(a_{21})e_2\in Z(\mathcal{A}),\quad(3)$$

再由引理1.5和引理1.9, 有

$$
\begin{aligned}
&ut_{a_{11},a_{12}}e_1f(a_{11})e_1-\alpha(e_1f(e_1)e_1-f_{11}(e_1)e_1)a_{11}+ut_{a_{11},a_{12}}e_2f(a_{11})e_2\\
&=ut_{a_{11},a_{12}}e_1f(a_{11})e_1-ut_{a_{11},a_{12}}\frac{s_{a_{11},a_{12}}t_{e_1,a_{12}}}{t_{a_{11},a_{12}}s_{e_1,a_{12}}}(e_1f(e_1)e_1-f_{11}(e_1)e_1)a_{11}+ut_{a_{11},a_{12}}e_2f(a_{11})e_2\\
&=ut_{a_{11},a_{12}}f_{11}(a_{11})e_1+ut_{a_{11},a_{12}}f_{11}(a_{11})e_2\\
&=ut_{a_{11},a_{12}}f_{11}(a_{11})\in Z(\mathcal{A}).
\end{aligned}\tag{4}
$$

同理, 由引理1.5和引理1.10, 有

$$
\begin{aligned}
&vt_{a_{22},a_{21}}e_1f(a_{22})e_1-\beta(e_2f(e_2)e_2-f_{22}(e_2)e_2)a_{22}+vt_{a_{22},a_{21}}e_2f(a_{22})e_2\\
&=vt_{a_{22},a_{21}}e_1f(a_{22})e_1-vt_{a_{22},a_{21}}\frac{s_{a_{22},a_{21}}t_{e_2,a_{21}}}{t_{a_{22},a_{21}}s_{e_2,a_{21}}}(e_2f(e_2)e_2-f_{22}(e_2)e_2)a_{22}+vt_{a_{22},a_{21}}e_2f(a_{22})e_2\\
&=vt_{a_{22},a_{21}}f_{22}(a_{22})e_1+vt_{a_{22},a_{21}}f_{22}(a_{22})e_2\\
&=vt_{a_{22},a_{21}}f_{22}(a_{22})\in Z(\mathcal{A}).
\end{aligned}\tag{5}
$$

综合式(3)–(5), 可以得到对任意的$x\in\mathcal{A}$有$\lambda_1(x)\in Z(\mathcal{A})$.

综上所述, 定理0.1成立.

从上述证明过程可以看出定理0.1的逆定理是不成立的. 因为$\lambda_0(x)$不一定属于$Z(\mathcal{A})$. 但是可以增加条件, 使逆定理成立.

推论 1.1　设$\mathcal{A}$是域$\mathbb{F}\,(\mathrm{char}\,\mathbb{F}=0)$上的结合代数, 且含有单位元1和幂等元$e$. $\mathcal{A}$满足$a\mathcal{A}e\neq0$, $a\mathcal{A}(1-e)\neq0$, 其中$a\neq0, a\in\mathcal{A}$. 设$f:\mathcal{A}\to\mathcal{A}$是弱可加映射, 任取$x,y\in\mathcal{A}$, 满足:

(a) $f(x)=0\Leftrightarrow x=0$;

(b) x,y线性相关$\Leftrightarrow f(x),f(y)$线性相关.

若$f(x)=\lambda_0(x)x+\lambda_1(x)$, 这里$\lambda_0(x)=\alpha(e_1f(e_1)e_1-f_{11}(e_1)e_1)+\beta(e_2f(e_2)e_2-f_{22}(e_2)e_2)$, $\lambda_1(x)\in Z(\mathcal{A})$并且$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{t_{e_1,e_2}}{s_{e_1,e_2}}$, 则$f$是交换映射.

证　明　由引理1.4和1.5, 存在非零$t_{e_1,e_2},s_{e_1,e_2}\in\mathbb{F}$, 使得

$$
\begin{aligned}
t_{e_1,e_2}e_1f(e_1)e_1&=e_1f(1)e_1-s_{e_1,e_2}e_1f(e_2)e_1\\
&=(z_1-s_{e_1,e_2}f_{22}(e_2))e_1\in Z(\mathcal{A}_{11})
\end{aligned}
$$

和

$$
\begin{aligned}
s_{e_1,e_2}e_2f(e_2)e_2&=e_2f(1)e_2-t_{e_1,e_2}e_2f(e_1)e_2\\
&=(z_2-t_{e_1,e_2}f_{11}(e_1))e_2\in Z(\mathcal{A}_{22}).
\end{aligned}
$$

令

$$
\alpha_1=\frac{1}{t_{e_1,e_2}}(z_1-s_{e_1,e_2}f_{22}(e_2)),\alpha_2=\frac{1}{s_{e_1,e_2}}(z_2-t_{e_1,e_2}f_{11}(e_1)).
$$

可以看出$\alpha_1,\alpha_2\in Z(\mathcal{A})$, 因此$e_if(e_i)e_i=\alpha_ie_i\in Z(\mathcal{A}_{ii})\,(i=1,2)$.

从上述讨论可得 $e_1f(e_1)e_1 - f_{11}(e_1)e_1 \in Z(\mathcal{A}_{11})$, 并且 $e_2f(e_2)e_2 - f_{22}(e_2)e_2 \in Z(\mathcal{A}_{22})$. 所以由引理 1.4, 对任意的 $a_{12} \in \mathcal{A}_{12}$, 有

$$\begin{aligned}\alpha e_1f(e_1)e_1a_{12} + \beta a_{12}f_{22}(e_2)e_2 &= (\alpha e_1f(e_1)e_1 + \beta f_{22}(e_2)e_1)a_{12}\\ &= (\alpha e_1f(e_1)e_1 + \beta e_1f(e_2)e_1)a_{12}\\ &= \gamma(t_{e_1,e_2}e_1f(e_1)e_1 + s_{e_1,e_2}e_1f(e_2)e_1)a_{12}\\ &= \gamma e_1f(1)e_1a_{12} = \gamma a_{12}e_2f(1)e_2\\ &= \gamma a_{12}(t_{e_1,e_2}e_2f(e_1)e_2 + s_{e_1,e_2}e_2f(e_2)e_2)\\ &= a_{12}(\alpha f_{11}(e_1)e_2 + \beta e_2f(e_2)e_2)\\ &= \alpha f_{11}(e_1)e_1a_{12} + \beta a_{12}e_2f(e_2)e_2,\end{aligned}$$

这里 $\alpha = \gamma t_{e_1,e_2}$, $\beta = \gamma s_{e_1,e_2}$, $\gamma \in \mathbb{F}$, 即

$$\alpha(e_1f(e_1)e_1 - f_{11}(e_1)e_1)a_{12} = \beta a_{12}(e_2f(e_2)e_2 - f_{22}(e_2)e_2),\ \forall a_{12} \in \mathcal{A}_{12}.$$

同理可证

$$\alpha a_{21}(e_1f(e_1)e_1 - f_{11}(e_1)e_1) = \beta(e_2f(e_2)e_2 - f_{22}(e_2)e_2)a_{21},\ \forall a_{21} \in \mathcal{A}_{21}.$$

由引理 1.1 可得

$$\lambda_0(x) = \alpha(e_1f(e_1)e_1 - f_{11}(e_1)e_1) + \beta(e_2f(e_2)e_2 - f_{22}(e_2)e_2) \in Z(\mathcal{A}).$$

由于矩阵代数是一类特殊的代数, 根据定理 0.1 和弱可加映射的定义可以得到如下推论.

推论 1.2 设 $M_n(\mathbb{F})$ 是定义在 $\mathbb{F}\,(\mathrm{char}\,\mathbb{F} = 0)$ 上的关于矩阵加法和乘法的矩阵代数, 映射 $f: M_n(\mathbb{F}) \to M_n(\mathbb{F})$ 是一个弱可加映射, 且对任意的 $x, y \in M_n(\mathbb{F})$, 满足:

(a) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

(b) x, y 线性相关 $\Leftrightarrow f(x), f(y)$ 线性相关.

如果 f 是交换映射, 则存在 $\lambda_0(x) \in M_n(\mathbb{F})$ 和 $\lambda_1(x) \in \mathbb{F}$ 使得 $f(x) = \lambda_0(x)x + \lambda_1(x)I$.

正如前面提到的例子, $\mathcal{A} = M_2(\mathbb{F})$ 是一个 $\mathbb{F}$- 结合代数且含有单位元 I 和幂等元 $e = \left(\begin{smallmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{smallmatrix}\right)$. $M_2(\mathbb{F})$ 满足 $aM_2(\mathbb{F})e \neq 0, aM_2(\mathbb{F})(I-e) \neq 0$, $\forall 0 \neq a \in \mathcal{A}$. $f(x) = \|x\|x$ 是一个弱可加映射, 且对任意的 $x, y \in M_2(\mathbb{F})$, 有

(a) $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

(b) x, y 线性相关 $\Leftrightarrow f(x), f(y)$ 线性相关.

则 f 是交换映射, 并且

$$f(x) = \|x\|x = \lambda_0(x)x + \lambda_1(x)I,$$

这里 $\lambda_0(x) = \|x\|I \in Z(M_2(\mathbb{F}))$, 并且 $\lambda_1(x) = 0 \in Z(M_2(\mathbb{F}))$.

[参 考 文 献]

[1] POSNER E C. Derivation in prime rings [J]. Proceedings of American Mathematical Society, 1957, 8(6): 1093-1100.

(下转第 18 页)

[参　考　文　献]

[1] AGARWAL R P, BOHNER M, LI W T. Nonoscillation and Oscillation: Theory for Functional Differential Equations[M]. New York: Marcel Dekker, 2004.

[2] 黄记洲, 符策红. 广义Emden-Fowler 方程的振动性[J]. 应用数学学报, 2015, 38(6): 1126-1135.

[3] 杨甲山. 二阶Emden-Fowler 型非线性变时滞微分方程的振荡准则[J]. 浙江大学学报(理学版), 2017, 44(2): 144-149.

[4] 杨甲山, 方彬. 二阶广义Emden-Fowler 型微分方程的振荡性[J]. 华中师范大学学报(自然科学版), 2016, 50(6): 799-804.

[5] 曾云辉, 罗李平, 俞元洪. 中立型Emden-Fowler时滞微分方程的振动性[J]. 数学物理学报(A辑), 2015, 35(4): 803-814.

[6] LI T X, ROGOVCHENKO Y V. Oscillatory behavior of second-order nonlinear neutral differential equations[J]. Abstract and Applied Analysis, 2014: 1-8. doi: 10.1155/2014/143614.

[7] AGARWAL R P, BOHNER M, LI T X, et al. Oscillation of second-order Emden–Fowler neutral delay differential equations[J]. Annali di Matematica Pura ed Applicata, 2014, 193(6): 1861-1875.

[8] YANG J S, WANG J J, QIN X W, et al. Oscillation of nonlinear second-order neutral delay differential equations[J]. Journal of Nonlinear Sciences and Applications, 2017, 10(5): 2727-2734.

[9] AGARWAL R P, BOHNER M, LI T X, et al. Oscillation of second-order differential equations with a sublinear neutral term[J]. Carpathian Journal of Mathematics, 2014, 30(1): 1-6.

[10] 罗红英, 屈英, 俞元洪. 具有正负系数的二阶中立型时滞Emden-Fowler方程的振动准则[J]. 应用数学学报, 2017, 40(5): 667-675.

(责任编辑: 林　磊)

(上接第 10 页)

[2] BREŠAR M. Centralizing mappings on von Neumann algebras [J]. Proceedings of American Mathematical Society, 1991, 111(2): 501-510.

[3] BREŠAR M. Centralizing mappings and derivations in prime rings [J]. Journal of Algebra, 1993, 156(2): 385-394.

[4] MAYNE J H. Centralizing automorphisms of prime rings [J]. Canadian Mathematical Bulletin, 1976, 19(1): 113-115.

[5] BREŠAR M, MARTINDLE W S, MIERS C R. Centralizing maps in prime ring with involution [J]. Journal of Algebra, 1993, 161(2): 342-357.

[6] LEE T K. σ-Commuting mappings in semiprime rings [J]. Communications in Algebra, 2001, 29(7): 2945-2951.

[7] LEE T K. Derivations and centralizing mappings in prime rings [J]. Taiwanese Journal of Mathematics, 1997, 1(3): 333-342.

[8] LEE T C. Derivations and centralizing maps on skew elements [J]. Soochow Journal of Mathematics, 1998, 24(4): 273-290.

[9] FILIPPIS V D, DHARA B. Some results concerning $n-\sigma$-centralizing mappings in semiprime rings [J]. Arabian Journal of Mathematics, 2014, 3(1): 15-21.

[10] DU Y Q, WANG Y. k-Commuting maps on triangular algebras [J]. Linear Algebra and its Applications, 2012, 436(5): 1367-1375.

[11] LI Y B, WEI F. Semi-centralizing maps of generalized matrix algebras [J]. Linear Algebra and its Applications, 2012, 436(5): 1122-1153.

[12] QI X F, HOU J C. Characterization of k-commuting additive maps on rings [J]. Linear Algebra and its Applications, 2015, 468: 48-62.

[13] ALI S, DAR N A. On $*$-centralizing mappings in rings with involution [J]. Georgian Mathematical Journal, 2014, 21(1): 25-28.

[14] BREŠAR M. Commuting Maps: A survey [J], Taiwanese Journal of Mathematics, 2004, 8(3): 361-397.

[15] BREŠAR M, ŠEMRL P. Commuting traces of biadditive maps revisited [J]. Communications in Algebra, 2003, 31(1): 381-388.

[16] BAI Z F, DU S P. Strong commutativity preserving maps on rings [J]. Rocky Mountain Journal of Mathematics, 2014, 44(3): 733-742.

(责任编辑: 林　磊)