

文章编号: 1000-5641(2019)04-0033-09

# 广义 Sasa-Satsuma 方程在半直线上的初边值问题

董凤娇<sup>1</sup>, 胡贝贝<sup>2</sup>

(1. 滁州学院 计算机与信息工程学院, 安徽 滁州 239000;

2. 滁州学院 数学与金融学院, 安徽 滁州 239000)

**摘要:** 本文基于 Fokas 统一变换方法分析了广义 Sasa-Satsuma 方程在半直线上的初边值问题. 假设广义 Sasa-Satsuma 方程的解  $u(x, t)$  存在, 证明了其初边值问题的解可用复谱参数  $\lambda$  平面上的  $3 \times 3$  矩阵 Riemann-Hilbert 问题的形式解唯一表示.

**关键词:** Riemann-Hilbert 问题; 广义 Sasa-Satsuma 方程; 初边值问题; Fokas 统一变换

**中图分类号:** O175.29 **文献标志码:** A **DOI:** 10.3969/j.issn.1000-5641.2019.04.004

## An initial-boundary value problem for the generalized Sasa-Satsuma equation on the half-line

DONG Feng-jiao<sup>1</sup>, HU Bei-bei<sup>2</sup>

(1. School of Computer and Information Engineering, Chuzhou University,  
Chuzhou Anhui 239000, China;

2. School of Mathematics and Finance, Chuzhou University, Chuzhou Anhui 239000, China)

**Abstract:** In this paper, we implement the Fokas unified transform method to study initial-boundary value problems of the generalized Sasa-Satsuma equation on the half-line. Assuming that the solution  $u(x, t)$  of the generalized Sasa-Satsuma equation exists, we will prove that it can be expressed in terms of the unique solution of a  $3 \times 3$  matrix Riemann-Hilbert problem formulated in the plane of the complex spectral parameter  $\lambda$ .

**Keywords:** Riemann-Hilbert problem; generalized Sasa-Satsuma equation; initial-boundary value problems; Fokas unified transform

## 0 引言

自 Gardner, Green, Kruskal, Miura 发现了反散射变换以来, 一直到 20 世纪 90 年代, 反散射变换几乎只是用来分析纯初值问题, 但是在现实自然界中, 越来越多的自然现象需要考虑边值条件, 这样就自然地需要考虑初边值问题来取代初值问题. 1997 年, Fokas<sup>[1]</sup>基于反

收稿日期: 2018-08-14

基金项目: 国家自然科学基金(11601055); 安徽省高校优秀青年人才基金(gxyq2019096); 安徽省高校自然科学研究项目(KJ2019A0637)

第一作者: 董凤娇, 女, 硕士, 助教, 从事计算机符号计算研究. E-mail: dfjjfd@163.com.

通信作者: 胡贝贝, 男, 博士, 讲师, 从事孤立子与可积系统研究. E-mail: hu\_chzu@163.com.

散射变换的思想首次提出了统一变换方法,很好地求解了可积方程的初边值问题.在过去的 20 年里,该方法已经用来分析了一些具有  $2 \times 2$  矩阵 Lax 对的重要可积方程的初边值问题<sup>[2-5]</sup>. 就像全直线上的反散射方法一样, Fokas 方法也是将初边值问题的解表示成相应的 Riemann-Hilbert 问题的解. 2012 年, Lenells<sup>[6]</sup>首次将此方法推广到  $3 \times 3$  矩阵可积方程,并且研究了 Degasperis-Procesi 方程在半直线上的初边值问题<sup>[7]</sup>. 在这之后,越来越多的学者开始关注 Riemann-Hilbert 问题,使得许多与高阶矩阵谱问题相关的可积方程初边值问题得以研究,比如, Novikov 方程<sup>[8]</sup>、Sasa-Stsuma 方程<sup>[9]</sup>、耦合 NLS 方程等<sup>[11-12]</sup>,作者在这方面也做了一些工作<sup>[13-16]</sup>.

众所周知,非线性薛定谔方程

$$iq_t + q_{xx} + 2|q|^2q = 0 \quad (1)$$

是描述非线性光纤、水波、等离子体中孤子传输的一个重要可积系统. 在文献 [17] 中, 高阶非线性薛定谔方程, 也就是 Sasa-Satsuma 方程

$$u_t + u_{xxx} + 6|u|^2u_x + 3u(|u|^2)_x = 0 \quad (2)$$

也描述了超短光脉冲的传播特性. 近来, Geng 和 Wu<sup>[18]</sup>提出了新的广义 Sasa-Satsuma 方程

$$u_t + u_{xxx} - 6a|u|^2u_x - 6bu^2u_x - 3au(|u|^2)_x - 3b^*u^*(|u|^2)_x = 0, \quad (3)$$

其中  $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{C}$ , 且  $a^2 \neq |b|^2$ , 并用 Riemann-Hilbert 方法得到了其  $N$ -孤子解. 本文中, 我们基于前人的工作, 运用 Fokas 统一变换方法研究广义 Sasa-Satsuma 方程在半直线  $\Omega = \{(x, t) : 0 < x < \infty, 0 < t < T\}$  上的初边值问题, 其初值和边值条件定义为

$$u_0(x) = u(x, t=0); q_0(t) = u(x=0, t); q_1(t) = u_x(x=0, t), q_2(t) = u_{xx}(x=0, t). \quad (4)$$

本文结构如下: 在第 1 节中, 定义了 Lax 对的两类特征函数  $\Phi_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) 和  $H_n$  ( $n = 1, 2, 3, 4$ ) 用来进行谱分析; 在第 2 节中, 我们证明了方程的解  $u(x, t)$  可以由  $3 \times 3$  矩阵 Riemann-Hilbert 问题重建.

## 1 谱分析

考虑广义 Sasa-Satsuma 方程 (3) 的  $3 \times 3$  矩阵 Lax 对

$$\begin{cases} \Psi_x = U\Psi = (i\lambda\sigma + Q)\Psi, \\ \Psi_t = V\Psi = (4i\lambda^3\sigma + 4\lambda^2Q + 2i\lambda(Q^2 + Q_x)\sigma + Q_xQ - QQ_x - Q_{xx} + 2Q^3)\Psi. \end{cases} \quad (5)$$

其中:  $\Psi = \Psi(x, t, \lambda)$  是一个  $3 \times 3$  矩阵或者  $3 \times 1$  列向量谱函数;  $\lambda \in \mathbb{C}$  是一个等谱参数;  $3 \times 3$  矩阵  $\sigma$  和  $Q$  定义如下

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & u \\ 0 & 0 & u^* \\ au^* + bu & au + b^*u^* & 0 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

事实上, Lax 对方程 (5) 可以写成

$$\begin{cases} \Psi_x - i\lambda\sigma = F\Psi, \\ \Psi_t - 4i\lambda^3\sigma = G\Psi. \end{cases} \quad (7)$$

其中:  $F = Q; G = 4\lambda^2 Q + 2i\lambda(Q^2 + Q_x)\sigma + Q_x Q - Q Q_x - Q_{xx} + 2Q^3$ .

假设  $u(x, t)$  在半直线区域  $\Omega$  内充分光滑, 并且当  $x \rightarrow \infty$  时快速衰减, 由

$$\Psi(x, t, \lambda) = \Phi(x, t, \lambda) e^{i(\lambda \sigma x + 4\lambda^3 \sigma t)} \quad (8)$$

引入一个新的特征函数  $\Phi = \Phi(x, t, \lambda)$ , 则相应的 Lax 对方程 (7) 变为

$$\begin{cases} \Phi_x - i\lambda[\sigma, \Phi] = F\Phi, \\ \Phi_t - i\lambda^3[\sigma, \Phi] = G\Phi. \end{cases} \quad (9)$$

因此, 方程 (9) 可以写成如下的全微分形式

$$d(e^{-(i\lambda \hat{\sigma} x + 4i\lambda^3 \hat{\sigma} t)} \Phi) = W(x, t, \lambda), \quad (10)$$

其中  $W(x, t, \lambda)$  定义如下

$$W(x, t, \lambda) = e^{-(i\lambda x + 2i\lambda^2 t) \hat{\sigma}} (F dx + G dt) \Phi. \quad (11)$$

这里的  $\hat{\sigma}$  是一个作用于  $3 \times 3$  矩阵的矩阵算子, 作用结果为:  $\hat{\sigma}Z = [\sigma, Z]$  和  $e^{\hat{\sigma}}Z = e^{\sigma}Z e^{-\sigma}$ .

### 1.1 特征函数

由 Volterra 积分方程定义 (9) 的 3 个特征函数  $\{\Phi_j(x, t, \lambda)\}_1^3$  为

$$\Phi_j(x, t, \lambda) = I + \int_{\gamma_j} e^{(i\lambda x + 2i\lambda^2 t) \hat{\sigma}} W_j(x, t, \lambda), \quad j = 1, 2, 3. \quad (12)$$

其中:  $I$  是一个  $3 \times 3$  单位矩阵;  $W_j$  由方程 (11) 定义, 只是用  $\Phi_j$  代替了那里的  $\Phi$ ;  $\{\gamma_j\}_1^3$  是 3 条光滑曲线, 如图 1 所示.

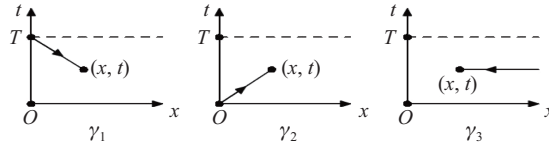


图1  $(x, t)$ -平面中的三条曲线  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$

Fig. 1 The three contours  $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$  in the  $(x, t)$ -domain

假设  $[\Phi_j]_k$  是  $\Phi_j$  的第  $k$  列向量, 由方程 (12) 得到  $\Phi_j(x, t, \lambda)$  的第一、二、三列分别含有如下的指数项

$$\begin{cases} [\Phi_j]_1 : e^{-2i\lambda(x-\xi) - 8i\lambda^3(t-\tau)}; [\Phi_j]_2 : e^{-2i\lambda(x-\xi) - 8i\lambda^3(t-\tau)}; \\ [\Phi_j]_3 : e^{2i\lambda(x-\xi) + 8i\lambda^3(t-\tau)}, e^{2i\lambda(x-\xi) + 8i\lambda^3(t-\tau)}. \end{cases} \quad (13)$$

同时, 在曲线上有如下的不等式

$$\gamma_1 : x - \xi \geq 0, t - \tau \leq 0; \quad \gamma_2 : x - \xi \geq 0, t - \tau \geq 0; \quad \gamma_3 : x - \xi \leq 0. \quad (14)$$

为了得到  $\{\Phi_j(x, t, \lambda)\}_1^3$  在复  $\lambda$ -平面上的有界解析区域, 我们用  $\text{Im}(i\lambda) = 0$  和  $\text{Im}(i\lambda^3) = 0$  把复  $\lambda$ -平面划分为四个区域(如图 2):

$$\begin{aligned} D_1 &= \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \arg \lambda \in \left(0, \frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{2\pi}{3}, \pi\right) \right\}, & D_2 &= \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \arg \lambda \in \left(\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right) \right\}, \\ D_3 &= \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \arg \lambda \in \left(\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right) \right\}, & D_4 &= \left\{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \arg \lambda \in \left(\pi, \frac{4\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right) \right\}. \end{aligned}$$

不难发现特征函数  $\{\Phi_j(x, t, \lambda)\}_1^3$  的有界解析区域分别为

$$\Phi_1: \lambda \in (D_3, D_3, D_2), \Phi_2: \lambda \in (D_4, D_4, D_1), \Phi_3: \lambda \in (C_+, C_+, C_-), \quad (15)$$

其中  $\{D_n\}_1^4$  表示四个开的、互不相交的复  $\lambda$ -平面内的子集, 而  $C_+ = D_1 \cup D_2$  和  $C_- = D_3 \cup D_4$  分别为复  $\lambda$ -平面的上、下半平面, 如图 2 所示. 并且, 这些集合  $\{D_n\}_1^4$  有如下的性质:

$$\begin{cases} D_1 = \{\lambda \in \mathbb{C} | \operatorname{Re} a_1 = \operatorname{Re} a_2 < \operatorname{Re} a_3, \operatorname{Re} b_1 = \operatorname{Re} b_2 < \operatorname{Re} b_3\}, \\ D_2 = \{\lambda \in \mathbb{C} | \operatorname{Re} a_1 = \operatorname{Re} a_2 < \operatorname{Re} a_3, \operatorname{Re} b_1 = \operatorname{Re} b_2 > \operatorname{Re} b_3\}, \\ D_3 = \{\lambda \in \mathbb{C} | \operatorname{Re} a_1 = \operatorname{Re} a_2 > \operatorname{Re} a_3, \operatorname{Re} b_1 = \operatorname{Re} b_2 < \operatorname{Re} b_3\}, \\ D_4 = \{\lambda \in \mathbb{C} | \operatorname{Re} a_1 = \operatorname{Re} a_2 > \operatorname{Re} a_3, \operatorname{Re} b_1 = \operatorname{Re} b_2 > \operatorname{Re} b_3\}, \end{cases} \quad (16)$$

其中  $a_k(\lambda)$  和  $b_k(\lambda)$  分别是  $3 \times 3$  矩阵  $i\lambda\sigma$  和  $4i\lambda^3\sigma$  的对角线元素.

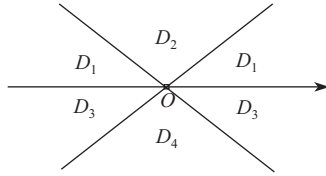


图 2 复  $\lambda$ -平面中的集合  $\{D_j\}_1^4$

Fig. 2 The sets  $\{D_n\}_1^4$ , which decompose the complex  $\lambda$ -plane

实际上, 对于  $x = 0$ ,  $\Phi_1(0, t, \lambda)$  有更大的有界解析区域  $(D_1 \cup D_3, D_1 \cup D_3, D_2 \cup D_4)$ ,  $\Phi_2(0, t, \lambda)$  有更大的有界解析区域  $(D_2 \cup D_4, D_2 \cup D_4, D_1 \cup D_3)$ .

对任一  $n = 1, 2, 3, 4$ , 由下面的积分方程定义方程 (9) 的一个解  $H_n(x, t, \lambda)$ :

$$(H_n(x, t, \lambda))_{ij} = \delta_{ij} + \int_{\gamma_{ij}^n} (e^{(i\lambda x + 4i\lambda^3 t)\sigma} W_n(\xi, \tau, \lambda))_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (17)$$

其中  $W_n(x, t, \lambda)$  由式 (11) 给定, 只是用  $H_n(x, t, \lambda)$  代替那里的  $\Phi(x, t, \lambda)$ , 曲线  $\gamma_{ij}^n$  ( $n = 1, 2, 3, 4; i, j = 1, 2, 3$ ) 的定义如下

$$\gamma_{ij}^n = \begin{cases} \gamma_1, & \text{如果 } \operatorname{Re} a_i(\lambda) < \operatorname{Re} a_j(\lambda) \text{ 且 } \operatorname{Re} b_i(\lambda) \geq \operatorname{Re} b_j(\lambda), \\ \gamma_2, & \text{如果 } \operatorname{Re} a_i(\lambda) < \operatorname{Re} a_j(\lambda) \text{ 且 } \operatorname{Re} b_i(\lambda) < \operatorname{Re} b_j(\lambda), \lambda \in D_n, \\ \gamma_3, & \text{如果 } \operatorname{Re} a_i(\lambda) \geq \operatorname{Re} a_j(\lambda). \end{cases} \quad (18)$$

按照  $\gamma^n$  的定义, 有

$$\begin{cases} \gamma^1 = \begin{pmatrix} \gamma_3 & \gamma_3 & \gamma_2 \\ \gamma_3 & \gamma_3 & \gamma_2 \\ \gamma_3 & \gamma_3 & \gamma_3 \end{pmatrix}, & \gamma^2 = \begin{pmatrix} \gamma_3 & \gamma_3 & \gamma_1 \\ \gamma_3 & \gamma_3 & \gamma_1 \\ \gamma_3 & \gamma_3 & \gamma_3 \end{pmatrix}, \\ \gamma^3 = \begin{pmatrix} \gamma_3 & \gamma_3 & \gamma_3 \\ \gamma_3 & \gamma_3 & \gamma_3 \\ \gamma_1 & \gamma_1 & \gamma_3 \end{pmatrix}, & \gamma^4 = \begin{pmatrix} \gamma_3 & \gamma_3 & \gamma_3 \\ \gamma_3 & \gamma_3 & \gamma_3 \\ \gamma_2 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{pmatrix}. \end{cases} \quad (19)$$

下面的命题保证了上述定义的  $H_n$  具有可以表示为一个 Rimann-Hilbert 问题的性质.

**命题 1.1** 对于每一个  $n = 1, 2, 3, 4$ ,  $\lambda \in D_n$  和  $(x, t) \in \Omega$ , 方程 (17) 定义的函数  $\{H_n(x, t, \lambda)\}_1^4$  有意义. 对于任一固定的点  $(x, t)$ ,  $H_n$  作为一个  $\lambda \in D_n$  除去一些奇异的离散点

集  $\{\lambda_j\}$  (在这些集合上 Fredholm 行列式等于 0) 外的函数是有界解析的. 同时,  $H_n(x, t, \lambda)$  可以有界连续到  $\bar{D}_n$ , 并且满足

$$H_n(x, t, \lambda) = I + O\left(\frac{1}{\lambda}\right), \quad \lambda \in D_n, \quad \lambda \rightarrow \infty, \quad n = 1, 2, 3, 4. \quad (20)$$

**证 明** 相关的有界解析性质在文献 [6] 的附录 B 中已给出. 将下面的展开式

$$H = H_0 + \frac{H^{(1)}}{\lambda} + \frac{H^{(2)}}{\lambda^2} + \cdots, \quad \lambda \rightarrow \infty,$$

代入到 Lax 对方程 (9) 中并比较  $\lambda$  的相同次幂的项就可以得到式 (20).

### 1.2 共轭特征函数

我们还需要分析矩阵值函数  $\{\Phi_j(x, t, \lambda)\}_1^3$  余子式的有界解析性质. 回顾一个  $3 \times 3$  矩阵  $Z$  的余子式矩阵  $Z^A$  定义为

$$Z^A = \begin{pmatrix} m_{11}(Z) & -m_{12}(Z) & m_{13}(Z) \\ -m_{21}(Z) & m_{22}(Z) & -m_{23}(Z) \\ m_{31}(Z) & -m_{32}(Z) & m_{33}(Z) \end{pmatrix},$$

其中  $m_{ij}(Z)$  表示  $3 \times 3$  矩阵  $Z$  的  $(i, j)$  元素的余子式. 由方程 (9) 知共轭特征函数  $\mu^A(x, t, \lambda)$  满足

$$\begin{cases} \Phi_x^A + i\lambda[\sigma, \Phi^A] = -F^T \Phi^A, \\ \Phi_t^A + 4i\lambda^3[\sigma, \Phi^A] = -G^T \Phi^A, \end{cases} \quad (21)$$

其中 T 表示转置. 于是, 特征函数  $\Phi_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) 是如下积分方程的解

$$\Phi_j^A(x, t, \lambda) = I - \int_{\gamma_j} e^{-(i\lambda(x-\xi) - 4i\lambda^3(t-\tau))\hat{\sigma}} (F^T d\xi + G^T d\tau), \quad j = 1, 2, 3. \quad (22)$$

然后可得到共轭特征函数如下的有界解析性质

$$\Phi_1^A : \lambda \in (D_2, D_2, D_3), \Phi_2^A : \lambda \in (D_1, D_1, D_4), \Phi_3^A : \lambda \in (C_-, C_-, C_+). \quad (23)$$

实际上, 对于  $x = 0$ ,  $\Phi_1^A(0, t, \lambda)$  有更大的有界解析区域  $(D_2 \cup D_4, D_2 \cup D_4, D_1 \cup D_3)$ ,  $\Phi_2^A(0, t, \lambda)$  有更大的有界解析区域  $(D_1 \cup D_3, D_1 \cup D_3, D_2 \cup D_4)$ .

### 1.3 跳跃矩阵与计算

新的谱函数  $S_n(\lambda)$  ( $n = 1, 2, 3, 4$ ) 定义为

$$S_n(\lambda) = H_n(0, 0, \lambda), \quad \lambda \in D_n, n = 1, 2, 3, 4. \quad (24)$$

假设  $M(x, t, \lambda)$  表示复  $\lambda$ -平面的分块解析连续函数, 即当  $\lambda \in D_n$  时,  $H(x, t, \lambda) = H_n(x, t, \lambda)$ . 于是  $H(x, t, \lambda)$  满足如下的跳跃条件

$$H_n(x, t, \lambda) = H_m(x, t, \lambda) J_{m,n}(x, t, \lambda), \lambda \in \bar{D}_n \cup \bar{D}_m, n, m = 1, 2, 3, 4, n \neq m, \quad (25)$$

其中  $J_{m,n}(x, t, \lambda)$  为跳跃矩阵, 满足如下关系

$$J_{m,n}(x, t, \lambda) = e^{(i\lambda x + 4i\lambda^3 t)\hat{\sigma}} (S_m^{-1}(\lambda) S_n(\lambda)). \quad (26)$$

此外, 由  $\{\Phi_j\}_1^3$  定义  $3 \times 3$  矩阵值函数  $s(\lambda)$  和  $S(\lambda)$  如下

$$\begin{cases} \Phi_3(x, t, \lambda) = \Phi_2(x, t, \lambda)e^{(i\lambda x + 4i\lambda^3 t)\hat{\sigma}}s(\lambda), \\ \Phi_1(x, t, \lambda) = \Phi_2(x, t, \lambda)e^{(i\lambda x + 4i\lambda^3 t)\hat{\sigma}}S(\lambda). \end{cases} \quad (27)$$

由于  $\Phi_2(0, 0, \lambda) = I$ , 分别计算方程 (27) 在  $(x, t) = (0, 0)$  和  $(x, t) = (0, T)$  的值, 我们有

$$s(\lambda) = \Phi_3(0, 0, \lambda), \quad S(\lambda) = \Phi_1(0, 0, \lambda) = e^{-2i\lambda^2 T \hat{\sigma}} \Phi_2^{-1}(0, T, \lambda). \quad (28)$$

按照式 (12) 中  $\Phi_j$  的定义, 方程 (28) 意味着

$$\begin{aligned} s(\lambda) &= I - \int_0^\infty e^{-i\lambda\xi\hat{\sigma}}(F\Phi_3)(\xi, 0, \lambda)d\xi, \\ S(\lambda) &= I - \int_0^T e^{-4i\lambda^3\tau\hat{\sigma}}(G\Phi_1)(0, \tau, \lambda)d\tau = \left[ I + \int_0^T e^{-4i\lambda^3\tau\hat{\sigma}}(G\Phi_2)(0, \tau, \lambda)d\tau \right]^{-1}, \end{aligned}$$

其中  $\{\Phi_j(0, t, \lambda)\}_1^2$  和  $\Phi_3(x, t, \lambda)$  ( $0 < x < \infty, 0 < t < T$ ) 满足 Volterra 积分方程:

$$\begin{aligned} \Phi_1(0, t, \lambda) &= I - \int_t^T e^{4i\lambda^3(t-\tau)\hat{\sigma}}(G\Phi_1)(0, \tau, \lambda)d\tau, \lambda \in (D_1 \cup D_3, D_1 \cup D_3, D_2 \cup D_4), \\ \Phi_2(0, t, \lambda) &= I + \int_0^T e^{4i\lambda^3(t-\tau)\hat{\sigma}}(G\Phi_2)(0, \tau, \lambda)d\tau, \lambda \in (D_2 \cup D_4, D_2 \cup D_4, D_1 \cup D_3), \\ \Phi_3(x, 0, \lambda) &= I - \int_x^\infty e^{i\lambda(x-\xi)\hat{\sigma}}(F\Phi_3)(\xi, 0, \lambda)d\xi, \lambda \in (C_+, C_+, C_-). \end{aligned}$$

由  $\{\Phi_j\}_1^3$  和  $\{\Phi_j^A\}_1^3$  的性质可得  $\{s(\lambda), S(\lambda)\}$  和  $\{s^A(\lambda), S^A(\lambda)\}$  有如下的有界解析性质:

$$\begin{cases} s(\lambda) : \lambda \in (C_+, C_+, C_-), & S(\lambda) : \lambda \in (D_1 \cup D_3, D_1 \cup D_3, D_2 \cup D_4), \\ s^A(\lambda) : \lambda \in (C_-, C_-, C_+), & S^A(\lambda) : \lambda \in (D_2 \cup D_4, D_2 \cup D_4, D_1 \cup D_3). \end{cases} \quad (29)$$

并且

$$H_n(x, t, \lambda) = \Phi_2(x, t, \lambda)e^{(i\lambda x + 4i\lambda^3 t)\hat{\sigma}}S_n(\lambda), \quad \lambda \in D_n. \quad (30)$$

**命题 1.2**<sup>[6, 13-16]</sup> 由方程 (30) 定义的  $S_n(\lambda)$  可以用  $s(\lambda)$  和  $S(\lambda)$  的元素表示如下:

$$\begin{aligned} S_1(\lambda) &= \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & 0 \\ s_{21} & s_{22} & 0 \\ s_{31} & s_{32} & \frac{1}{m_{33}(s)} \end{pmatrix}, \quad S_2(\lambda) = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \frac{S_{13}}{(S^T s^A)_{33}} \\ s_{21} & s_{22} & \frac{S_{23}}{(S^T s^A)_{33}} \\ s_{31} & s_{32} & \frac{S_{33}}{(S^T s^A)_{33}} \end{pmatrix}, \\ S_3(\lambda) &= \begin{pmatrix} S_{11}^{(3)} & S_{12}^{(3)} & s_{13} \\ S_{21}^{(3)} & S_{22}^{(3)} & s_{23} \\ S_{31}^{(3)} & S_{32}^{(3)} & s_{33} \end{pmatrix}, \quad S_4(\lambda) = \begin{pmatrix} \frac{m_{22}(s)}{s_{33}} & \frac{m_{21}(s)}{s_{33}} & s_{13} \\ \frac{m_{12}(s)}{s_{33}} & \frac{m_{11}(s)}{s_{33}} & s_{23} \\ 0 & 0 & s_{33} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (31)$$

其中

$$\begin{aligned} S_{11}^{(3)} &= \frac{m_{22}(s)m_{33}(S) - m_{32}(s)m_{23}(S)}{(s^T S^A)_{33}}, & S_{12}^{(3)} &= \frac{m_{21}(s)m_{33}(S) - m_{31}(s)m_{23}(S)}{(s^T S^A)_{33}}, \\ S_{21}^{(3)} &= \frac{m_{12}(s)m_{33}(S) - m_{32}(s)m_{13}(S)}{(s^T S^A)_{33}}, & S_{22}^{(3)} &= \frac{m_{11}(s)m_{33}(S) - m_{31}(s)m_{13}(S)}{(s^T S^A)_{33}}, \\ S_{31}^{(3)} &= \frac{m_{12}(s)m_{23}(S) - m_{22}(s)m_{13}(S)}{(s^T S^A)_{33}}, & S_{32}^{(3)} &= \frac{m_{11}(s)m_{23}(S) - m_{21}(s)m_{13}(S)}{(s^T S^A)_{33}}. \end{aligned}$$

这里  $(S^T s^A)_{33}$  和  $(s^T S^A)_{33}$  分别为

$$\begin{aligned}(S^T s^A)_{33} &= S_{13}m_{13}(s) - S_{23}m_{23}(s) + S_{33}m_{33}(s), \\ (s^T S^A)_{33} &= s_{13}m_{13}(S) - s_{23}m_{23}(S) + s_{33}m_{33}(S).\end{aligned}$$

#### 1.4 留数条件

由于  $\Phi_2(x, t, \lambda)$  是全纯函数, 由方程 (30) 知  $H(x, t, \lambda)$  仅在  $S_n(\lambda)$  产生奇异的地方有奇异. 从精确表达式 (31) 可知,  $H(x, t, \lambda)$  可能出现的奇异情况如下.

##### 假设 1.3 假设

- $m_{33}(s)(\lambda)$  在  $D_1$  内有  $n_0 \geq 0$  个可能的单零点, 记为  $\{\lambda_j\}_1^{n_0}$ ;
- $(S^T s^A)_{33}(\lambda)$  在  $D_2$  内有  $n_1 - n_0 \geq 0$  个可能的单零点, 记为  $\{\lambda_j\}_{n_0+1}^{n_1}$ ;
- $(s^T S^A)_{33}(\lambda)$  在  $D_3$  内有  $n_2 - n_1 \geq 0$  个可能的单零点, 记为  $\{\lambda_j\}_{n_1+1}^{n_2}$ ;
- $s_{33}(\lambda)$  在  $D_4$  内有  $N - n_2 \geq 0$  个可能的单零点, 记为  $\{\lambda_j\}_{n_2+1}^N$ .

且上面的零点互不相同, 同时假设  $m_{33}(s)(\lambda)$ ,  $(S^T s^A)_{33}(\lambda)$ ,  $(s^T S^A)_{33}(\lambda)$ ,  $s_{33}(\lambda)$  在  $D_n$  ( $n = 1, 2, 3, 4$ ) 的边界上没有零点. 在这些零点的留数条件由下列命题给出.

**命题 1.4** 假设  $\{H_n(x, t, \lambda)\}_1^4$  是由式 (17) 定义的特征函数, 且奇异集  $\{\lambda_j\}_1^N$  如上面的假设所述, 于是, 有如下的留数关系成立:

$$\text{Res}_{\lambda=\lambda_j}[H_1]_3 = \frac{s_{12}(\lambda_j)[H(\lambda_j)]_1 - s_{11}(\lambda_j)[H(\lambda_j)]_2}{m_{33}(s)(\lambda_j)m_{23}(s)(\lambda_j)} e^{\theta_{31}(\lambda_j)}, \quad 1 \leq j \leq n_0, \quad \lambda_j \in D_1. \quad (32)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \text{Res}_{\lambda=\lambda_j}[H_2]_3 &= \frac{s_{32}(\lambda_j)S_{13}(\lambda_j) - s_{32}(\lambda_j)S_{33}(\lambda_j)}{(S^T s^A)_{33}(\lambda_j)m_{23}(s)(\lambda_j)} e^{\theta_{31}(\lambda_j)} [H(\lambda_j)]_1 \\ &\quad + \frac{s_{11}(\lambda_j)S_{32}(\lambda_j) - s_{31}(\lambda_j)S_{13}(\lambda_j)}{(S^T s^A)_{33}(\lambda_j)m_{23}(s)(\lambda_j)} e^{\theta_{31}(\lambda_j)} [H(\lambda_j)]_2, \\ n_0 + 1 \leq j \leq n_1, \quad \lambda_j \in D_2. \end{aligned} \right. \quad (33)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \text{Res}_{\lambda=\lambda_j}[H_3]_1 &= \frac{m_{12}(s)(\lambda_j)m_{33}(S)(\lambda_j) - m_{32}(s)(\lambda_j)m_{13}(S)(\lambda_j)}{(s^T S^A)_{33}(\lambda_j)s_{23}(\lambda_j)} e^{\theta_{13}(\lambda_j)} [H(\lambda_j)]_3, \\ n_1 + 1 \leq j \leq n_2, \quad \lambda_j \in D_3. \end{aligned} \right. \quad (34)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \text{Res}_{\lambda=\lambda_j}[H_3]_2 &= \frac{m_{21}(s)(\lambda_j)m_{33}(S)(\lambda_j) - m_{31}(s)(\lambda_j)m_{23}(S)(\lambda_j)}{(s^T S^A)_{33}(\lambda_j)s_{13}(\lambda_j)} e^{\theta_{13}(\lambda_j)} [H(\lambda_j)]_3, \\ n_1 + 1 \leq j \leq n_2, \quad \lambda_j \in D_3. \end{aligned} \right. \quad (35)$$

$$\text{Res}_{\lambda=\lambda_j}[H_4]_1 = \frac{m_{12}(s)(\lambda_j)}{s_{33}(\lambda_j)s_{23}(\lambda_j)} e^{\theta_{13}(\lambda_j)} [H(\lambda_j)]_3, \quad n_2 + 1 \leq j \leq N, \quad \lambda_j \in D_4. \quad (36)$$

$$\text{Res}_{\lambda=\lambda_j}[H_4]_2 = \frac{m_{12}(s)(\lambda_j)}{s_{33}(\lambda_j)s_{13}(\lambda_j)} e^{\theta_{13}(\lambda_j)} [H(\lambda_j)]_3, \quad n_2 + 1 \leq j \leq N, \quad \lambda_j \in D_4. \quad (37)$$

其中:  $\dot{f} = \frac{df}{d\lambda}$ ;  $\theta_{ij}$  表示为

$$\theta_{ij}(x, t, \lambda) = (a_i - a_j)x - (b_i - b_j)t, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (38)$$

**证 明** 这里我们只证明式 (32), 而式 (33)—(37) 可以类似证明. 由式 (30) 知

$$H_1(x, t, \lambda) = \Phi_2(x, t, \lambda)e^{(i\lambda x + 4i\lambda^3 t)\hat{\sigma}} S_1(\lambda), \quad \lambda \in D_1. \quad (39)$$

再结合式 (31) 中给出的  $S_1(\lambda)$ , 我们得到式 (39) 的 3 列分别为

$$[H_1]_1 = [\Phi_2]_1 s_{11} + [\Phi_2]_2 s_{21} e^{\theta_{21}} + [\Phi_2]_3 s_{31} e^{\theta_{31}}, \quad (40)$$

$$[H_1]_2 = [\Phi_2]_1 s_{12} e^{\theta_{12}} + [\Phi_2]_2 s_{22} + [\Phi_2]_3 s_{32} e^{\theta_{32}}, \quad (41)$$

$$[H_1]_3 = [\Phi_2]_3 \frac{1}{m_{33}(s)}. \quad (42)$$

从式 (40) 和式 (41) 中解出  $[\Phi_2]_1$  和  $[\Phi_2]_3$ , 并且代入式 (42) 得到

$$[H_1]_3 = \frac{s_{12}}{m_{33}(s)m_{23}(s)}[H_1]_1 e^{\theta_{31}} - \frac{s_{11}}{m_{33}(s)m_{23}(s)}[H_1]_2 e^{\theta_{31}} - \frac{1}{m_{23}(s)}[\Phi_2]_2 e^{\theta_{23}}. \quad (43)$$

在  $\lambda_j$  处取留数, 就得到  $\lambda_j \in D_1$  的留数关系式 (32).

### 1.5 全局关系

由方程 (27) 定义的谱函数  $S(\lambda)$  和  $s(\lambda)$  彼此之间并不是相互独立的, 而是满足一个重要的关系. 事实上, 由式 (27) 得

$$\Phi_3(x, t, \lambda) = \Phi_1(x, t, \lambda)e^{(i\lambda x + 4i\lambda^3 t)\hat{\sigma}} S^{-1}(\lambda)s(\lambda), \quad \lambda \in (C_+, C_+, C_-). \quad (44)$$

因为  $\Phi_1(0, t, \lambda) = I$ , 在  $(x, t) = (0, T)$  处计算上式, 得到如下的全局关系

$$S^{-1}(\lambda)s(\lambda) = e^{-4i\lambda^3 T\hat{\sigma}} c(T, \lambda), \quad \lambda \in (C_+, C_+, C_-), \quad (45)$$

其中  $c(T, \lambda) = \Phi_3(0, T, \lambda) = I - \int_0^\infty e^{i\lambda\xi\hat{\sigma}} (F\Phi_3)(0, T, \lambda)d\xi$ .

## 2 Riemann-Hilbert 问题

在上节中定义的分片连续函数  $H(x, t, \lambda)$  满足一个与  $u(x, t)$  的初边值数据有关的  $3 \times 3$  矩阵 Riemann-Hilbert 问题. 通过解这个  $3 \times 3$  矩阵 Riemann-Hilbert 问题, 对于所有的  $(x, t)$  可以重建方程 (3) 的解. 因此, 我们有如下的结果.

**定理 2.1** 假设  $u(x, t)$  是方程 (3) 在半直线区域  $\Omega = \{(x, t) : 0 < x < \infty, 0 < t < T\}$  当  $x \rightarrow \infty$  时具有充分光滑和快速衰减的解, 则  $u(x, t)$  可以由初始数据  $u_0(x)$ 、边界数据  $\{q_0(t), q_1(t), q_2(t)\}$  重建. 利用初始数据和边界数据如式 (27) 定义谱函数  $s(\lambda)$  和  $S(\lambda)$ , 进而定义跳跃矩阵  $J_{m,n}(x, t, \lambda)$ , 假设函数  $m_{33}(s)(\lambda)$ ,  $(S^T s^A)_{33}(\lambda)$ ,  $(s^T S^A)_{33}(\lambda)$  和  $s_{33}(\lambda)$  的可能零点为  $\{\lambda_j\}_1^N$ , 如假设 1.3 所述. 则方程 (3) 的解  $u(x, t)$  为

$$u(x, t) = 2i \lim_{\lambda \rightarrow \infty} [\lambda H(x, t, \lambda)]_{13}, \quad (46)$$



其中  $H(x, t, \lambda)$  满足如下的  $3 \times 3$  矩阵 Riemann-Hilbert 问题:

- $H(x, t, \lambda)$  是复  $\lambda$ -平面上的分片解析函数, 其跳跃发生在  $\bar{D}_n \cup \bar{D}_m$  ( $n, m = 1, 2, 3, 4$ ) (如图 2).

- 在曲线  $\bar{D}_n \cup \bar{D}_m$  ( $n, m = 1, 2, 3, 4$ ) 上,  $H(x, t, \lambda)$  有如下的跳跃关系

$$H_n(x, t, \lambda) = H_m(x, t, \lambda) J_{m,n}(x, t, \lambda), \quad \lambda \in \bar{D}_n \cup \bar{D}_m, \quad n \neq m. \quad (47)$$

- $H(x, t, \lambda) = I + O(\frac{1}{\lambda}), \lambda \rightarrow \infty$ .

- $H(x, t, \lambda)$  满足命题 1.4 的留数关系.

则  $H(x, t, \lambda)$  存在并且唯一.

**证 明** 这里只需要证明式 (46). 该式可以由特征函数的大  $\lambda$  渐近性质得到, 而该定理的其他部分可以用类似文献 [9] 的方法证明.

### [参 考 文 献]

- [1] FOKAS A S. A unified transform method for solving linear and certain nonlinear PDEs [J]. Proc R Soc Lond A, 1997, 453: 1411-1443.
- [2] FOKAS A S. Integrable nonlinear evolution equations on the half-line [J]. Commun Math Phys, 2002, 230: 1-39.
- [3] FOKAS A S, ITS A R, SUNG L Y. The nonlinear Schrödinger equation on the half-line [J]. Nonlinearity, 2005, 18: 1771-1822.
- [4] XIA B Q, FOKAS A S. Initial-boundary value problems associated with the Ablowitz-Ladik system [J]. Physica D, 2018, 364: 27-61.
- [5] ZHANG N, XIA T C, HU B B. A Riemann-Hilbert approach to the complex Sharma-Tasso-Olver equation on the half line [J]. Commun Theor Phys, 2017, 68(2): 580-594.
- [6] LENELLS J. Initial-boundary value problems for integrable evolution equations with  $3 \times 3$  Lax pairs [J]. Phys D, 2012, 241: 857-875.
- [7] LENELLS J. The Degasperis-Procesi equation on the half-line [J]. Nonlinear Anal, 2013, 76: 122-139.
- [8] DE MONVEL B A, SHEPELSKY D, ZIELINSKI L. A Riemann-Hilbert approach for the Novikov equation [J]. SIGMA, 2016, 12: 095.
- [9] XU J, FAN E G. The unified method for the Sasa-Satsuma equation on the half-line [J]. Proc R Soc A Math Phys Eng Sci, 2013, 469: 1-25.
- [10] GENG X G, LIU H, ZHU J Y. Initial-boundary value problems for the coupled nonlinear Schrödinger equation on the half-line [J]. Stud Appl Math, 2015, 135: 310-346.
- [11] TIAN S F. Initial-boundary value problems for the general coupled nonlinear Schrödinger equation on the interval via the Fokas method [J]. J Differ Equations, 2017, 262: 506-558.
- [12] YAN Z Y. An initial-boundary value problem for the integrable spin-1 Gross-Pitaevskii equations with a  $4 \times 4$  Lax pair on the half-line [J]. CHAOS, 2017, 27: 053117.
- [13] HU B B, XIA T C, ZHANG N, et al. Initial-boundary value problems for the coupled higher-order nonlinear Schrödinger equations on the half-line [J]. Int J Nonlin Sci Num, 2018, 19(1): 83-92.
- [14] HU B B, XIA T C, MA W X. Riemann-Hilbert approach for an initial-boundary value problem of the two-component modified Korteweg-de Vries equation on the half-line [J]. Appl Math Comput, 2018, 332: 148-159.
- [15] HU B B, XIA T C. A Fokas approach to the coupled modified nonlinear Schrödinger equation on the half-line [J]. Math Method Appl Sci, 2018, 41(13): 5112-5123.
- [16] HU B B, XIA T C, MA W X. Riemann-Hilbert approach for an initial-boundary value problem of an integrable coherently coupled nonlinear Schrödinger system on the half-line [J]. E Asian J Appld Math, 2018, 8(3): 531-548.
- [17] SASA N, SATSUMA J. New-type of solutions for a higher-order nonlinear evolution equation [J]. J Phys Soc Japan, 1991, 60: 409-417.
- [18] GENG X G, WU J P. Riemann-Hilbert approach and  $N$ -soliton solutions for a generalized Sasa-Satsuma equation [J]. Wave Motion, 2016, 60: 62-72.

(责任编辑: 林 磊)