文章编号: 1000-5641(2019)04-0052-10

一类具退化强制的椭圆方程熵解的存在性

代丽丽

(通化师范学院 数学学院, 吉林 通化 134002)

摘 要: 通过运用截断方法研究了一类带有变指数的椭圆方程. 先利用变指数情形下的 Marcinkiewicz 估计, 在得到逼近解序列的截断函数先验估计的基础上, 选取适当的检验函数对逼近解序列做出估计, 以此得出这类椭圆方程在加权Sobolev空间中熵解的存在性.

关键词: 退化椭圆方程; 加权 Sobolev 空间; 变指数; 截断函数

中图分类号: O175.2 **文献标志码:** A **DOI:** 10.3969/j.issn.1000-5641.2019.04.006

Existence of entropy solutions for an elliptic equation with degenerate coercivity

DAI Li-li

(*School of Mathematics*, *Tonghua Normal University*, *Tonghua Jilin* 134002, *China*)

Abstract: In this paper, we use the truncation method to investigate the existence of solutions for degenerate elliptic problems with variable exponent in weighted Sobolev spaces. With the help of the Marcinkiewicz estimate and using some a priori estimates for the sequence of solutions of the approximate problem, and we choose suitable test functions for the approximate equation and obtain the needed estimates. Then, we obtain the entropy solutions for the elliptic equation in weighted Sobolev spaces with a variable exponent.

Keywords: degenerate elliptic equation; weighted Sobolev space; variable exponent; truncation function

0 引 言

近几十年来, 因为椭圆方程在几何学、电磁学、弹性力学、流体力学中都有着重要应用, 所以该选题一直都是学者们关注的重点内容. 随着研究的不断深入, 带有变指数的偏微分模型走进了学者们的视野, 它主要来源于电流变流体[1], 可以描述非 Newton 流体的热对流效应[2] 以及热动力学中的一些演化现象[3], 非齐次媒质的热与物质交换[4] 等, 还可应用于力学[5], 图像学[6] 等多方面. 与常指数偏微分模型相比它具有更多的优势, 能够更为实际和精准地描述扩散过程. 主要是因为指数 $p(x)$ 的非齐次物理特征影响状态变量 u, 即所谓的

收稿日期: 2018-08-01

基金项目: 吉林省科技厅青年科研基金(20160520103JH)

作者简介: 代丽丽, 女, 博士, 副教授, 研究方向偏微分方程及其应用. E-mail: drx820115@126.com.

非标准增长条件. 因此, 本文在加权常指数的 Sobolev 空间基础上, 考虑了将常指数推广为变指数的情形, 即在加权变指数 Sobolev 空间中研究一类带有退化强制项和零阶项的非线性 $p(x)$-Laplace 方程

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(\dfrac{\omega(x)|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u}{(1+|u|)^{\gamma(x)}}\right)+g(x,u)=f, & x\in\Omega, \\ u=0, & x\in\partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\Omega\subset\mathbb{R}^N(N\geqslant 2)$ 是具有 Lipschitz 边界 $\partial\Omega$ 的有界区域, $\gamma(x)\in C(\overline{\Omega})$, $\gamma(x)\geqslant 0$, f 是 $L^1(\Omega)$ 中的可测函数, $\omega(x)$ 为权函数. 此外, 我们始终假设:

$\mathcal{A}1$: $p(x)\in C(\overline{\Omega})$, $p^+:=\max\limits_{x\in\overline{\Omega}}p(x)$, $p^-:=\min\limits_{x\in\overline{\Omega}}p(x)$ 满足 $1<p^-\leqslant p^+<N$. 另外, $p(x)$ 满足 log-Hölder 连续性条件, 即对任意的 $x,y\in\Omega$, $|x-y|\leqslant\dfrac{1}{2}$, 存在常数 $C>0$, 使得

$$|p(x)-p(y)|\leqslant\frac{C}{-\log|x-y|}.$$

$\mathcal{A}2$: $g(x,s)$ 是一个 Carathéodory 函数, 并对任意的 $k\in\mathbb{R}^+$, 有

$$\sup_{|s|\leqslant k}|g(x,s)|=h_k(x)\in L^1(\Omega). \tag{2}$$

另外, 对几乎处处的 $x\in\Omega$ 和任意的 $s\in\mathbb{R}$, g 满足下面的符号条件

$$g(x,s)\cdot s\geqslant 0. \tag{3}$$

$\mathcal{A}3$: (1) $\omega\in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, $\omega^{\frac{-1}{p(x)-1}}\in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, 其中$L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$为局部可积空间;

(2) $\omega^{-s(x)}\in L^1(\Omega)$, $s(x)\in\left(\dfrac{N}{p(x)},\infty\right)\cap\left[\dfrac{1}{p(x)-1},\infty\right)$.

现在, 我们给出问题 (1) 熵解的定义.

定义 0.1　称可测函数 $u\in W_0^{1,p(x)}(\Omega,\omega)$ 为问题 (1) 的一个熵解, 如果 $T_k(u)\in W_0^{1,p(x)}(\Omega,\omega)$, 并且对任何 $\varphi\in W_0^{1,p(x)}(\Omega,\omega)\cap L^\infty(\Omega)$, 有

$$\int_\Omega\frac{\omega(x)|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u}{(1+|u|)^{\gamma(x)}}\cdot\nabla T_k(u-\varphi)\mathrm{d}x+\int_\Omega g(x,u)T_k(u-\varphi)\mathrm{d}x=\int_\Omega fT_k(u-\varphi)\mathrm{d}x. \tag{4}$$

1　准备知识

本节中, 我们给出加权变指数 Sobolev 空间的一些相关知识, 更多细节请参见文献 [7].

1.1　$L^{p(x)}(\Omega,\omega)$ 空间

设 $\omega(x)$ 在 $\mathbb{R}^N$ 上是一个正的可测函数, 并且是几乎处处有限函数, 集合 $C_+(\overline{\Omega})=\{\varsigma\in C(\overline{\Omega}):\min\limits_{x\in\overline{\Omega}}\varsigma(x)>1\}$. 对任意的 $\varsigma\in C_+(\overline{\Omega})$, 我们定义

$$\varsigma_+=\sup_{x\in\Omega}\varsigma(x),\quad \varsigma_-=\inf_{x\in\Omega}\varsigma(x).$$

对任意的 $p \in C_+(\overline{\Omega})$, 我们给出加权的变指数 Lebesgue 空间 $L^{p(x)}(\Omega,\omega)$, 它由所有满足以下形式的可测函数 $u(x)$ 组成:

$$\int_\Omega \omega(x)|u(x)|^{p(x)}\mathrm{d}x < \infty,$$

并赋予范数

$$\|u\|_{L^{p(x)}(\Omega,\omega)} = \inf\left\{\lambda > 0 : \int_\Omega \omega(x)\left|\frac{u(x)}{\lambda}\right|^{p(x)} \leqslant 1\right\}.$$

1.2 $W^{k,p(x)}(\Omega,\omega)$ 空间

对任意的正整数 k, 记

$$W^{k,p(x)}(\Omega,\omega) = \{u \in L^{p(x)}(\Omega,\omega) : D^\alpha u \in L^{p(x)}(\Omega,\omega),\ |\alpha| \leqslant k\},$$

并赋予范数

$$\|u\|_{W^{k,p(x)}(\Omega,\omega)} = \sum_{|\alpha|\leqslant k}\|D^\alpha u\|_{L^{p(x)}(\Omega,\omega)}.$$

1.3 常用不等式

如果我们记

$$\rho(u) = \int_\Omega \omega(x)|u|^{p(x)}\mathrm{d}x, \quad \forall\ u \in L^{p(x)}(\Omega,\omega),$$

那么

$$\min\{\|u\|^{p^-}_{L^{p(x)}(\Omega,\omega)}, \|u\|^{p^+}_{L^{p(x)}(\Omega,\omega)}\} \leqslant \rho(u) \leqslant \max\{\|u\|^{p^-}_{L^{p(x)}(\Omega,\omega)}, \|u\|^{p^+}_{L^{p(x)}(\Omega,\omega)}\}.$$

1.4 指标 $p_s(x)$ 与 $p_s^*(x)$

对任意的 $p, s \in C_+(\overline{\Omega})$, 设

$$p_s(x) := \frac{p(x)s(x)}{1+s(x)} < p(x),$$

其中 $s(x) \in \left(\dfrac{N}{p(x)}, \infty\right) \cap \left[\dfrac{1}{p(x)-1}, \infty\right)$. 对任意的 $x \in \Omega$, 我们固定变指数的限制

$$p_s^*(x) := \begin{cases} \dfrac{p(x)s(x)N}{(s(x)+1)N - p(x)s(x)}, & N > p_s(x), \\ +\infty, & N \leqslant p_s(x). \end{cases}$$

1.5 加权变指数 Sobolev 空间的连续嵌入定理

设 $p, s \in C_+(\overline{\Omega})$ 满足 log-Hölder 连续性条件. 若 $r \in C_+(\overline{\Omega})$ 且 $1 < r(x) \leqslant p_s^*$, 那么有如下连续嵌入

$$W^{1,p(x)}(\Omega,\omega) \hookrightarrow L^{r(x)}(\Omega).$$

当 $\inf\limits_{x\in\Omega}(p_s^*(x) - r(x)) > 0$ 时, 嵌入是紧的.

1.6 Poincaré 型不等式

设 $p \in C_+(\overline{\Omega})$ 满足 log-Hölder 连续性条件, 则对任意的 $u \in C_0^\infty(\Omega)$, 估计式

$$\|u\|_{L^{p(x)}(\Omega)} \leqslant C\|\nabla u\|_{L^{p(x)}(\Omega,\omega)}$$

成立, 其中常数 $C > 0$ 与 u 无关.

1.7　截断函数 $T_k(s)$

一般情形下, 对于在 $\mathbb{R}$ 中的 s, k, 其中 $k \geqslant 0$, 高度为 k 的截断函数[8] $T_k(s)$ 定义为

$$T_k(s)=\max(-k,\min(k,s))=\begin{cases} s, & 若\ |s|<k,\\ k, & 若\ s\geqslant k,\\ -k, & 若\ s\leqslant -k.\end{cases}$$

鉴于其重要性以及为了直观起见, 我们给出它的简图.

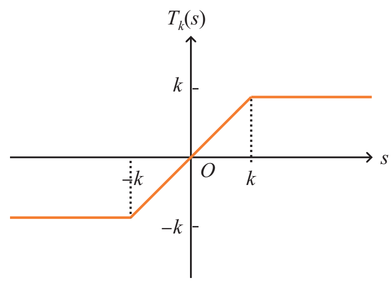

图 1　函数$T_k(s)$

Fig. 1　Function $T_k(s)$

2　熵解的存在性

定理 2.1　假设 $\mathcal{A}1$—$\mathcal{A}3$ 成立, $f\in L^1(\Omega)$, 那么问题 (1) 至少存在一个熵解.

证　明　我们将分 5 步完成证明(过程参见文献 [9-11]).

第 1 步　逼近问题及先验估计. 为了证明方程 (1) 解的存在性结果, 我们建立方程 (1) 的逼近问题

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\left(\dfrac{\omega(x)|\nabla u_n|^{p(x)-2}\nabla u_n}{(1+|T_n(u_n)|)^{\gamma(x)}}\right)+g_n(x,u_n)=f_n, & x\in\Omega,\\ u_n=0, & x\in\partial\Omega.\end{cases}\tag{5}$$

这里, $\{f_n\}$ 是 $L^\infty(\Omega)$ 中的函数序列且在 $L^1(\Omega)$ 中强收敛于 f. $g_n(x,s)=T_n g(x,s)$, 且满足式 (2)、式(3). 由文献 [12] 的结果, 逼近问题 (5) 至少存在一个弱解 $u_n\in W_0^{1,p(x)}(\Omega,\omega)$, 且对任意的 $v\in W_0^{1,p(x)}(\Omega,\omega)\cap L^\infty(\Omega)$, 有

$$\int_\Omega \frac{\omega(x)|\nabla u_n|^{p(x)-2}\nabla u_n}{(1+|T_n(u_n)|)^{\gamma(x)}}\cdot\nabla v\mathrm{d}x+\int_\Omega g_n(x,u_n)v\mathrm{d}x=\int_\Omega f_n v\mathrm{d}x.\tag{6}$$

接下来, 我们对逼近解序列 $\{u_n\}$ 做一些先验估计. 对每一个 $k>0$, 取 $T_k(u_n)$ 为 (6) 的一个检验函数, 我们有

$$\int_\Omega \frac{\omega(x)|\nabla u_n|^{p(x)-2}\nabla u_n}{(1+|T_n(u_n)|)^{\gamma(x)}}\cdot\nabla T_k(u_n)\mathrm{d}x+\int_\Omega g_n(x,u_n)T_k(u_n)\mathrm{d}x=\int_\Omega f_n T_k(u_n)\mathrm{d}x.\tag{7}$$

现在要估计式 (4), 注意到 $T_k(s)$ 与 s 同号, 去掉式 (7) 左端第二个非负项, 可得

$$\int_\Omega \frac{\omega(x)|\nabla T_k(u_n)|^{p(x)}}{(1+|T_n(u_n)|)^{\gamma(x)}}\mathrm{d}x\leqslant k\|f\|_{L^1(\Omega)}.$$

如果选取 $n>k$, 我们有

$$\int_\Omega \frac{\omega(x)|\nabla T_k(u_n)|^{p(x)}}{k(1+k)^{\gamma(x)}}\mathrm{d}x \leqslant \|f\|_{L^1(\Omega)}. \tag{8}$$

因此, 对所有 $k>0$, 可得

$$\int_\Omega \omega(x)|\nabla T_k(u_n)|^{p(x)}\mathrm{d}x \leqslant k(1+k)^{\gamma^+}\|f\|_{L^1(\Omega)}. \tag{9}$$

注意到式(8), 若 $k\geqslant 1$, 那么

$$\int_\Omega \frac{\omega(x)|\nabla T_k(u_n)|^{p(x)}}{k(k+k)^{\gamma(x)}}\mathrm{d}x \leqslant \|f\|_{L^1(\Omega)}.$$

这样, 对于 $k\geqslant 1$, 我们有

$$\int_\Omega \frac{\omega(x)|\nabla T_k(u_n)|^{p(x)}}{k^{\gamma^++1}}\mathrm{d}x \leqslant C\int_\Omega \frac{\omega(x)|\nabla T_k(u_n)|^{p(x)}}{k^{\gamma(x)+1}}\mathrm{d}x \leqslant C\|f\|_{L^1(\Omega)}, \tag{10}$$

其中 C 是与 n 无关的常数. 由加权变指数空间中的 Sobolev 嵌入定理, 可知

$$W_0^{1,p(x)}(\Omega,\omega) \hookrightarrow L^{p_s^*(x)}(\Omega) \hookrightarrow L^{(p_s^*)^-}(\Omega).$$

其中

$$(p_s^*)^- = \frac{p^-s^-N}{(s^-+1)N-p^-s^-}.$$

注意到式 (10), 并对 $k\geqslant 1$, 我们有

$$\begin{aligned}
\|T_k(u_n)\|_{L^{(p_s^*)^-}(\Omega,\omega)} &\leqslant C\|\nabla T_k(u_n)\|_{L^{p(x)}(\Omega,\omega)}\\
&\leqslant C\left(\int_\Omega \omega(x)|\nabla T_k(u_n)|^{p(x)}\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{\beta}}\\
&\leqslant C\left(\|f\|_{L^1(\Omega)}k^{\gamma^++1}\right)^{\frac{1}{\beta}},
\end{aligned}$$

其中

$$\beta=\begin{cases} p^-, & 若\ \|\nabla T_k(u_n)\|_{L^{p(x)}(\Omega,\omega)}\geqslant 1,\\ p^+, & 若\ \|\nabla T_k(u_n)\|_{L^{p(x)}(\Omega,\omega)}\leqslant 1.\end{cases}$$

我们将Ω分成$\{|u_n|\geqslant k\}$与$\{u_n<k\}$两部分. 其中$\{x\in\Omega \| u_n(x)|\geqslant k\}$简记为$\{|u_n|\geqslant k\}$,$\{x\in\Omega\| u_n(x)|<k\}$简记为$\{|u_n|<k\}$. 考虑到 $\{|u_n|\geqslant k\}=\{|T_k(u_n)|\geqslant k\}$, $p^->\gamma^++1$, 我们有

$$\begin{aligned}
\mathrm{meas}\{|u_n|\geqslant k\} &\leqslant \left(\frac{\|T_k(u_n)\|_{L^{(p_s^*)^-}(\Omega,\omega)}}{k}\right)^{(p_s^*)^-}\\
&\leqslant \frac{C\|f\|_{L^1(\Omega)}^{\frac{(p_s^*)^-}{\beta}}}{k^{(p_s^*)^-(1-\frac{\gamma^++1}{\beta})}} \leqslant \frac{C(\|f\|_{L^1(\Omega)}+1)^{\frac{(p_s^*)^-}{p^-}}}{k^{(p_s^*)^-(1-\frac{\gamma^++1}{p^-})}},
\end{aligned}$$

其中 C 为常数, $\text{meas}\{|u_n| \geqslant k\}$ 为 $\{|u_n| \geqslant k\}$ 的测度. 同时当 $0 < k < 1$ 时, 显然 $\text{meas}\{|u_n| \geqslant k\} \leqslant |\Omega|$, 这样我们得到

$$\lim_{k\to\infty} \text{meas}\{|u_n| > k\} = 0, \text{ 关于 } n \text{ 一致收敛.} \tag{11}$$

第 2 步 $\{u_n\}$ 在 Ω 上几乎处处收敛于 u. 我们将证明对任意的 $\epsilon > 0$, 有 $\lim\limits_{n,m\to+\infty} \text{meas}\{|u_n - u_m| > \epsilon\} = 0$. 对每一个 $n, m \in \mathbb{N}$, 有下面的集合关系

$$\{|u_n - u_m| > \epsilon\} \subset \{|u_n| > k\} \cup \{|u_m| > k\} \cup \{|T_k(u_n) - T_k(u_m)| > \epsilon\},$$

也就是说

$$\text{meas}\{|u_n - u_m| > \epsilon\} \leqslant \text{meas}\{|u_n| > k\} + \text{meas}\{|u_m| > k\} + \text{meas}\{|T_k(u_n) - T_k(u_m)| > \epsilon\}.$$

对每一个固定的 $\sigma > 0$, 我们选取充分大的 $\widehat{k}$, 使得

$$\text{meas}\{|u_n - u_m| > \epsilon\} \leqslant \frac{\sigma}{2} + \text{meas}\{|T_{\widehat{k}}(u_n) - T_{\widehat{k}}(u_m)| > \epsilon\}. \tag{12}$$

注意到式 (9), 我们可知 $\{T_k(u_n)\}$ 在 $W_0^{1,p(x)}(\Omega, \omega)$ 中有界. 对每一个固定的 $k > 0$, $\{T_k(u_n)\}$ 在 $L^{p(x)}(\Omega, \omega)$ 中预紧, 且 $\{T_k(u_n)\}$ 依测度收敛. 考虑到 k 的任意性, 我们有

$$\lim_{n,m\to\infty} \text{meas}\{|u_n - u_m| > \epsilon\} = 0,$$

这说明 $\{u_n\}$ 依测度收敛, 根据 Riesz 定理, 存在 $\{u_n\}$ 的一个子序列 (仍记做本身)以及一个可测函数 u, 使得

$$u_n \to u, \text{ 在 } \Omega \text{ 上几乎处处收敛.} \tag{13}$$

结合式 (9), 我们可选取 $\{T_k(u_n)\}$ 的适当子列 (仍记作本身), 则有

$$T_k(u_n) \to T_k(u), \text{ 于 } W_0^{1,p(x)}(\Omega, \omega) \text{ 中弱收敛.} \tag{14}$$

第 3 步 $\{g_n(x, u_n)\}$ 在 $L^1(\Omega)$ 中强收敛. 令 $\rho_i(s)$ 是一个单调递增并且一致有界的 Lipschitz 函数, 当 $i \to \infty$ 时, 满足 $\rho_i \to \chi_{\{|s|>k\}}\text{sign}(s)$. 我们在式 (5) 中选取 $\rho_i(s)$ 作为检验函数, 则有

$$\int_\Omega \frac{\omega(x)\rho_i'(u_n)|\nabla u_n|^{p(x)}}{(1 + |T_n(u_n)|)^{\gamma(x)}} \mathrm{d}x + \int_\Omega g_n(x, u_n)\rho_i(u_n)\mathrm{d}x = \int_\Omega f_n\rho_i(u_n)\mathrm{d}x. \tag{15}$$

由于式 (15) 左端第一项为非负项, 我们去掉非负项, 可得

$$\int_\Omega g_n(x, u_n)\rho_i(u_n)\mathrm{d}x \leqslant \int_\Omega f_n\rho_i(u_n)\mathrm{d}x.$$

结合式 (2), 并运用 Lebesgue 控制收敛定理, 取 $i \to \infty$ 时的极限, 有

$$\int_{\{|u_n|>k\}} |g_n(x, u_n)|\mathrm{d}x \leqslant \int_{\{|u_n|>k\}} |f_n|\mathrm{d}x. \tag{16}$$

对任意给定的 $\epsilon > 0$, 注意到式 (11) 以及 $\{f_n\}$ 在 $L^1(\Omega)$ 中强收敛于 f, 则存在充分大的 $k_\epsilon > 0$, 使得

$$\int_{\{|u_n|>k_\epsilon\}} |f_n|\mathrm{d}x < \epsilon.$$

对 Ω 中的可测子集 E, 结合式 (2) 及式 (16), 有

$$\begin{aligned}\int_E |g_n(x,u_n)|\mathrm{d}x &= \int_{E\cap\{|u_n|\leqslant k_\epsilon\}} |g_n(x,u_n)|\mathrm{d}x + \int_{E\cap\{|u_n|>k_\epsilon\}} |g_n(x,u_n)|\mathrm{d}x \\ &\leqslant \int_{\{|u_n|>k_\epsilon\}} |f_n|\mathrm{d}x + \int_E h_{k_\epsilon}(x)\mathrm{d}x \\ &\leqslant \epsilon + \int_E h_{k_\epsilon}(x)\mathrm{d}x \leqslant 2\epsilon.\end{aligned}$$

于是, $\{g_n(x,u_n)\}$ 是等度可积的. 另一方面, 由于 $\{g_n\}$ 满足 Carathéodory 条件以及式(13), 我们知道 $g_n(x,u_n) \to g(x,u)$ 在 Ω 上几乎处处收敛. 根据 Vitali 定理, 我们有

$$g_n(x,u_n) \to g(x,u),\ \text{于 } L^1(\Omega) \text{ 中强收敛}. \tag{17}$$

第 4 步 $T_k(u_n)$ 在 $W_0^{1,p(x)}(\Omega,\omega)$ 中强收敛. 设 $h > k$, 并选取 $v = T_{2k}[u_n - T_h(u_n) + T_k(u_n) - T_k(u)]$ 作为 (6) 的检验函数, 我们有

$$\begin{aligned}&\underbrace{\int_\Omega \frac{\omega(x)|\nabla u_n|^{p(x)-2}\nabla u_n}{(1+|T_n(u_n)|)^{\gamma(x)}} \cdot \nabla T_{2k}[u_n - T_h(u_n) + T_k(u_n) - T_k(u)]\mathrm{d}x}_{(\mathrm{A})} \\ &+ \underbrace{\int_\Omega g_n(x,u_n)T_{2k}[u_n - T_h(u_n) + T_k(u_n) - T_k(u)]\mathrm{d}x}_{(\mathrm{B})} \\ = &\underbrace{\int_\Omega f_n T_{2k}[u_n - T_h(u_n) + T_k(u_n) - T_k(u)]\mathrm{d}x}_{(\mathrm{C})}.\end{aligned}$$

为了方便起见, 我们记 $\{\varepsilon_{n,h}\}$ 满足

$$\lim_{h\to\infty}\lim_{n\to\infty} \varepsilon_{n,h} = 0.$$

类似地, $\{\varepsilon_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$. 关于 (B) 项和 (C) 项, 结合式 (14)、式 (17), 以及 f_n 在 $L^1(\Omega)$ 中强紧, 我们有

$$\int_\Omega g_n(x,u_n)T_{2k}[u_n - T_h(u_n) + T_k(u_n) - T_k(u)]\mathrm{d}x = \varepsilon_{n,h}, \tag{18}$$

$$\int_\Omega f_n T_{2k}[u_n - T_h(u_n) + T_k(u_n) - T_k(u)]\mathrm{d}x = \varepsilon_{n,h}. \tag{19}$$

于是, 由式(18)、式(19)可得

$$\int_\Omega (f_n - g_n(x,u_n))T_{2k}[u_n - T_h(u_n) + T_k(u_n) - T_k(u)]\mathrm{d}x = \varepsilon_{n,h}.$$

关于 (A), 我们设 $M = 4k + h$, 当 $|u_n| \geqslant M$ 时, 有 $\nabla T_{2k}[u_n - T_h(u_n) + T_k(u_n) - T_k(u)] = 0$. (A) 可拆分为

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{A}) =& \int_{\{|u_n|<k\}} \frac{\omega(x)|\nabla T_M(u_n)|^{p(x)-2}\nabla T_M(u_n)}{(1+|T_n(u_n)|)^{\gamma(x)}} \cdot \nabla T_{2k}[u_n - T_h(u_n) + T_k(u_n) - T_k(u)]\mathrm{d}x \\
&+ \int_{\{|u_n|\geqslant k\}} \frac{\omega(x)|\nabla T_M(u_n)|^{p(x)-2}\nabla T_M(u_n)}{(1+|T_n(u_n)|)^{\gamma(x)}} \cdot \nabla T_{2k}[u_n - T_h(u_n) + T_k(u_n) - T_k(u)]\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

由于在集合 $\{|u_n| < k\}$ 中, $u_n - T_h(u_n) = 0$, 且在集合 $\{|u_n| \geqslant k\}$ 中, $\nabla T_k(u_n) = 0$, 我们有

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{A}) =& \int_{\Omega} \frac{\omega(x)|\nabla T_k(u_n)|^{p(x)-2}\nabla T_k(u_n)}{(1+|T_n(u_n)|)^{\gamma(x)}} \cdot \nabla[T_k(u_n) - T_k(u)]\mathrm{d}x \\
&+ \int_{\{|u_n|\geqslant k\}} \frac{\omega(x)|\nabla T_M(u_n)|^{p(x)-2}\nabla T_M(u_n)}{(1+|T_n(u_n)|)^{\gamma(x)}} \cdot \nabla[u_n - T_h(u_n)]\mathrm{d}x \\
&- \int_{\{|u_n|\geqslant k\}} \frac{\omega(x)|\nabla T_M(u_n)|^{p(x)-2}\nabla T_M(u_n)}{(1+|T_n(u_n)|)^{\gamma(x)}} \cdot \nabla T_k(u)\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

上式右端第二项为非负项, 去掉非负项并对右端第一项进行拆分后可得

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_{n,h} \geqslant& \int_{\Omega} \frac{\omega(x)[|\nabla T_k(u_n)|^{p(x)-2}\nabla T_k(u_n) - |\nabla T_k(u)|^{p(x)-2}\nabla T_k(u)]}{(1+|T_n(u_n)|)^{\gamma(x)}} \cdot \nabla[T_k(u_n) - T_k(u)]\mathrm{d}x \\
&+ \int_{\Omega} \frac{\omega(x)|\nabla T_k(u)|^{p(x)-2}\nabla T_k(u)}{(1+|T_n(u_n)|)^{\gamma(x)}} \cdot \nabla[T_k(u_n) - T_k(u)]\mathrm{d}x \\
&- \int_{\{|u_n|\geqslant k\}} \frac{\omega(x)|\nabla T_M(u_n)|^{p(x)-2}\nabla T_M(u_n)}{(1+|T_n(u_n)|)^{\gamma(x)}} \cdot \nabla T_k(u)\mathrm{d}x \\
=& I_n + J_n - K_n.
\end{aligned}
$$

上式后两项在 $n \to \infty$ 时都趋近于 0. 事实上, 关于 J_n, 设 $n > h$, 注意到式 (9), 这表明 $\dfrac{\omega(x)|\nabla T_k(u)|^{p(x)-2}\nabla T_k(u)}{(1+|T_n(u_n)|)^{\gamma(x)}}$ 在 $(L^{p'(x)}(\Omega, \omega^*))^N$ 中是强紧的. 结合式 (14), 我们有

$$
\lim_{n\to\infty} J_n = \lim_{n\to\infty} \int_{\Omega} \frac{\omega(x)|\nabla T_k(u)|^{p(x)-2}\nabla T_k(u)}{(1+|T_n(u_n)|)^{\gamma(x)}} \cdot \nabla[T_k(u_n) - T_k(u)]\mathrm{d}x = 0.
$$

关于 K_n, 可整理为

$$
K_n = \int_{\Omega} \frac{\omega(x)|\nabla T_M(u_n)|^{p(x)-2}\nabla T_M(u_n) \cdot \nabla T_k(u)\chi_{\{|u_n|\geqslant k\}}}{(1+|T_n(u_n)|)^{\gamma(x)}}\mathrm{d}x.
$$

当 $n \to \infty$ 时, $\dfrac{\nabla T_k(u)\chi_{\{|u_n|\geqslant k\}}}{(1+|T_n(u_n)|)^{\gamma(x)}}$ 在 $\left(L^{p(x)}(\Omega, \omega)\right)^N$ 中强收敛于 0. 同时结合式 (9), 我们可知 $\omega(x)|\nabla T_M(u_n)|^{p(x)-2}\nabla T_M(u_n)$ 在 $(L^{p'(x)}(\Omega, \omega^*))^N$ 中有界, 因而有

$$
\lim_{n\to\infty} K_n = \lim_{n\to\infty} \int_{\{|u_n|\geqslant k\}} \frac{\omega(x)|\nabla T_M(u_n)|^{p(x)-2}\nabla T_M(u_n)}{(1+|T_n(u_n)|)^{\gamma(x)}} \cdot \nabla T_k(u)\mathrm{d}x = 0.
$$

综上, 对 $n > M > h > k$, 根据 $p(x)$-Laplace 算子的单调性, 可得

$$
\begin{aligned}
\varepsilon(n,h) \geqslant I_n \geqslant& \frac{1}{(1+k)^{\gamma^+}} \int_{\Omega} \omega(x)[|\nabla T_k(u_n)|^{p(x)-2}\nabla T_k(u_n) - |\nabla T_k(u)|^{p(x)-2}\nabla T_k(u)] \\
&\times \nabla[T_k(u_n) - T_k(u)]\mathrm{d}x \geqslant 0.
\end{aligned}
$$

即当 $n\to\infty$ 时, 我们有

$$\nabla T_k(u_n)\to\nabla T_k(u),\ \text{于}(L^{p(x)}(\Omega,\omega))^N\text{中强收敛}. \tag{20}$$

第 5 步 u 是问题 (1) 的熵解. 在式 (5) 中选取 $T_k(u_n-\phi)$ 作为检验函数, 其中 $\phi\in W_0^{1,p(x)}(\Omega,\omega)\cap L^\infty(\Omega)$, 有

$$\int_\Omega\frac{\omega(x)|\nabla u_n|^{p(x)-2}\nabla u_n}{(1+|T_n(u_n)|)^{\gamma(x)}}\cdot\nabla T_k(u_n-\phi)\mathrm{d}x+\int_\Omega g(x,u_n)T_k(u_n-\phi)\mathrm{d}x=\int_\Omega f_nT_k(u_n-\phi)\mathrm{d}x. \tag{21}$$

对于上式的后两项, 结合式 (17), 且 $\{f_n\}$ 在 $L^1(\Omega)$ 中强紧, 以及在 $L^\infty(\Omega)$ 中 $T_k(u_n-\phi)$ 弱$*$收敛于 $T_k(u-\phi)$, 那么当 $n\to\infty$ 时, 我们有

$$\int_\Omega g(x,u_n)T_k(u_n-\phi)\mathrm{d}x\to\int_\Omega g(x,u)T_k(u-\phi)\mathrm{d}x,$$

$$\int_\Omega f_nT_k(u_n-\phi)\mathrm{d}x\to\int_\Omega fT_k(u-\phi)\mathrm{d}x.$$

对于式 (21) 左端第一项, 设 $L=k+\|\phi\|_{L^\infty(\Omega)}$, 结合式 (13), 我们有

$$T_k(u_n-\phi)\to T_k(u-\phi),\ \text{在 }\Omega\text{ 上几乎处处收敛}.$$

另外, 注意到式 (9), 有

$$\begin{aligned}\int_\Omega\omega(x)|\nabla T_k(u_n-\phi)|^{p(x)}\mathrm{d}x&=\int_{\{|u_n-\phi|<k\}}\omega(x)|\nabla(u_n-\phi)|^{p(x)}\mathrm{d}x\\&\leqslant\int_{\{|u_n|<L\}}\omega(x)|\nabla(u_n-\phi)|^{p(x)}\mathrm{d}x\\&\leqslant 2^{p^+}\left(\int_\Omega\omega(x)|\nabla T_L(u_n)|^{p(x)}\mathrm{d}x+\int_\Omega\omega(x)|\nabla\phi|^{p(x)}\mathrm{d}x\right)\\&\leqslant C\ (\text{与 }n\text{ 无关}).\end{aligned}$$

因此, $T_k(u_n-\phi)$ 在 $W_0^{1,p(x)}(\Omega,\omega)$ 中有界, 即

$$\int_\Omega T_k(u_n-\phi)\mathrm{d}x\to\int_\Omega T_k(u-\phi)\mathrm{d}x,\ \text{于 }W_0^{1,p(x)}(\Omega,\omega)\text{ 中弱收敛}. \tag{22}$$

设 $n>L$, 结合式 (20)、式 (22), 我们有

$$\begin{aligned}&\int_\Omega\frac{\omega(x)|\nabla u_n|^{p(x)-2}\nabla u_n\cdot\nabla T_k(u_n-\phi)}{(1+|T_n(u_n)|)^{\gamma(x)}}\mathrm{d}x\\&=\int_\Omega\frac{\omega(x)|\nabla T_L(u_n)|^{p(x)-2}\nabla T_L(u_n)\cdot\nabla T_k(u_n-\phi)}{(1+|T_L(u_n)|)^{\gamma(x)}}\mathrm{d}x\\&\to\int_\Omega\frac{\omega(x)|\nabla T_L(u)|^{p(x)-2}\nabla T_L(u)\cdot\nabla T_k(u-\phi)}{(1+|T_L(u)|)^{\gamma(x)}}\mathrm{d}x\\&=\int_\Omega\frac{\omega(x)|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u\cdot\nabla T_k(u-\phi)}{(1+|u|)^{\gamma(x)}}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

这样我们就证明了 u 是问题 (1) 的熵解.

[参　考　文　献]

[1] RŮŽIČKA M. Electrorheological fluids: Modeling and Mathematical Theory [M]. Berlin: Springer-Verlag, 2000.

[2] ANTONTSEV S N, DÍAZ J I, DE OLIVEIRA H B. Thermal effects without phase changing [J]. Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Application, 2015, 61: 1-14.

[3] ELEUTERI M, HABERMANN J. Calderón-Zygmund type estimates for a class of obstacle problems with $p(x)$ growth[J]. J Math Anal Appl, 2010, 372: 140-161.

[4] RODRIGUES J F, SANCHÓN M, URBANO J M. The obstacle problem for nonlinear elliptic equations with variable growth and L^1-data[J]. Monatsh Math, 2008, 154: 303-322.

[5] BLANCHARD D, GUIBÉ O. Existence of a solution for a nonlinear system in thermoviscoelasticity[J]. Adv Differential Equations, 2000, 5: 1221-1252.

[6] HARJULEHTO P, HÄSTÖ P, LATVALA V, et al. Critical variable exponent functionals in image restoration[J]. Appl Math Lett, 2013, 26: 56-60.

[7] GOL'DSHTEIN V, UKHLOV A. Weighted Sobolev spaces and embedding theorems[J]. Trans Amer Math Soc, 2009, 361: 3829-3850.

[8] BLANCHARD D, MURAT F, REDWANE H. Existence and uniqueness of a renormalized solution for a fairly general class of nonlinear parabolic problems [J]. J Differential Equations, 2001, 177(2): 331-374.

[9] DAI L L, GAO W J, LI Z Q. Existence of solutions for degenerate elliptic problems in weighted Sobolev space[J]. Journal of Function Spaces, 2015, 2015: 1-9.

[10] ZHANG C, ZHOU S. Entropy and renormalized solutions for the $p(x)$-Laplacian equation with measure data[J]. Bull Aust Math Soc, 2010, 82: 459-479.

[11] 代丽丽, 曹春玲. 一类具权函数的退化椭圆方程解的性质[J]. 吉林大学学报(理学版), 2018, 56: 589-593.

[12] LIONS J L. Quelques méthodes de résolution des problemes aux limites non linéaires[M]. Paris: Dunod, 1969.

(责任编辑: 林　磊)