文章编号: 1000-5641(2010)01-0091-08

关于 p-Laplace 算子的一个最优估计

王林峰

(南通大学 理学院, 江苏 南通 226000)

摘要: M是带度量 g 的 n 维非紧黎曼流形, $1 < p \leqslant 2$ 给定常数, $\triangle_p$ 是M 上的 p-Laplace 算子, 借助于经典的 Li-Yau 的方法证明了在一定的曲率条件下, 满足方程$\triangle_p u = -\lambda|u|^{p-2}u$ 的正函数的一个梯度估计, 其中$\lambda \geqslant 0$ 是常数; 同时得到了λ 的一个上界估计; 进一步说明了此估计是最优的. 推广了关于 Laplace 算子$\triangle$ 的椭圆方程 $\triangle u = -\lambda u$ 梯度估计的结果.

关键词: p-Laplace; 梯度估计; 最优估计

中图分类号: O186　　**文献标识码**: A

Sharp estimate of the p-Laplace operator

WANG Lin-feng

(*School of Science, Nantong University, Nantong Jiangsu* 226000, *China*)

Abstract: Let M be an n-dimensional complete noncompact Riemannian manifold with metric g, $\triangle_p (1 < p \leqslant 2)$ the p-Laplace operator, by using the classical method of Li-Yau, a gradient estimate of the positive solution to equation $\triangle_p u = -\lambda|u|^{p-2}u$ was proved under suitable curvature condition, in which $\lambda \geqslant 0$ is a constant; the upper bound estimate of λ was a byproduct; one also showed that this estimate is sharp. This result generalizes the gradient estimate of the positive solution to elliptic equation $\triangle u = -\lambda u$.

Key words: p-Laplace operator; gradient estimate; sharp estimate

0 引　　言

1975年, Yau[1]利用极大值原理证明了在带有非负 Ricci 曲率的完备流形上不存在非常数的正的调和函数, 后来, 借助于类似的讨论方法, 他和 Cheng[2]合作得到了更为广泛的椭圆方程的梯度估计. 经过对 Yau 的梯度估计方法的改进, Li 和 Wang[3]得到在 Ricci 曲率张量有负下界的流形上关于椭圆方程

$$\triangle u = -\lambda u \tag{1}$$

的梯度估计, 具体的说, 他们得到结果.

收稿日期: 2009-02

基金项目: 国家自然科学基金(10871070); 南通大学自然科学基金(07Z001); 南通大学博士科研基金(08B04);江苏省高校自然科学基础研究面上项目(08KJD110015)

作者简介: 王林峰, 男, 博士, 研究方向为几何分析. E-mail: wlf711178@126.com.

定理 0.1 M是 n 维完备黎曼流形, Ricci 曲率不小于$-n+1$, 假定定义在 M 上的正函数 u 满足式 (1), $\lambda \geqslant 0$是常数, 则

$$\lambda \leqslant \frac{(n-1)^2}{4}, \tag{2}$$

且

$$|\nabla u|^2(x) \leqslant \left[\frac{(n-1)^2}{2} - \lambda + (n-1)\sqrt{\frac{(n-1)^2}{4} - \lambda}\right] u^2(x), \tag{3}$$

式(2)和(3)中的等号是可以取得的.

对常数$1 < p < 2$, 考虑能量泛函$\int_M |\nabla u|^p \,\mathrm{d}x$, 将在$W_0^{1,p}(M)$上得到Rayleigh商$\dfrac{\int_M |\nabla u|^p \,\mathrm{d}x}{\int_M |u|^p \,\mathrm{d}x}$的极小化函数, 满足Euler-Lagrange方程

$$\triangle_p u = \mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = -\lambda |u|^{p-2}u, \tag{4}$$

其中$\triangle_p$为p-Laplace算子. 关于p-Laplace算子特征值有广泛的研究, 参见文献[4-6].

本文将定理 0.1 推广到 p-Laplace 算子的情形, 得到如下结果.

定理 0.2 M 是n 维完备流形, 截面曲率不小于$-K, (K \geqslant 0)$, 对非负常数λ, 定义在M上的正函数u 满足(4)式, 则

$$\lambda \leqslant \left(\frac{\sqrt{K}(n-1)}{p}\right)^p, \tag{5}$$

u 满足梯度估计

$$\frac{|\nabla u|^p}{u^p}(x) \leqslant C, \tag{6}$$

其中

$$\begin{aligned} C = \;& C(n,p,K,\lambda) = -(p-1)^{-1}\lambda + (n-1)^p p^{1-p}(p-1)^{-1}K^{\frac{p}{2}} \\ & + (p-1)^{-1}\sqrt{2p^{1-2p}(n-1)^{2p}K^p - 2p^{1-p}(n-1)^p K^{\frac{p}{2}}\lambda}, \end{aligned}$$

并且对任意的$x, y \in M$, 有如下的关系.

$$u(x)\exp\left(-C^{1/p}r(x,y)\right) \leqslant u(y) \leqslant u(x)\exp\left(C^{1/p}r(x,y)\right), \tag{7}$$

其中$r(x,y)$ 表示x, y 之间的测地距离.

1 定理 0.2 中等号成立的例子

这一节我们说明式(5)和(6)中的等号是可以成立的. 考虑完备流形$M^n = \mathbf{R} \times \mathbf{N}^{n-1}$, 带有卷积度量$\mathrm{d}s_M^2 = \mathrm{d}t^2 + \mathrm{e}^{2t}\mathrm{d}s_N^2$. 考虑$\mathbf{N}^{n-1}$ 上的标准正交余切标架场$\{\theta_\alpha, 2 \leqslant \alpha \leqslant n\}$, 于是

$$\{\omega_1 = \mathrm{d}t, \omega_\alpha = \mathrm{e}^t\theta_\alpha, 2 \leqslant \alpha \leqslant n\}$$

是M 上的标准正交余切标架场, 同时假设$\{e_1, \cdots, e_n\}$ 为$\{\omega_1, \cdots, \omega_n\}$ 的对偶切向量场, 类似于文献[7]中的计算, 容易得到M 上的截面曲率为

$$K_M(e_1, e_\alpha) = -1, K_M(e_\alpha, \mathrm{e}_\beta) = \mathrm{e}^{-2t}K_N(e_\alpha, e_\beta) - 1, 2 \leqslant \alpha, \beta \leqslant n.$$

如果$\mathbf{N}$ 的截面曲率非负, 则M 的截面曲率不小于-1. 考虑定义在M 上的函数$u = \exp\left(-\dfrac{n-1}{p}t\right)$, 可以作如下的计算,

$$\begin{aligned}\triangle_p u &= \nabla u \cdot \nabla|\nabla u|^{p-2} + |\nabla u|^{p-2}\triangle u \\ &= \nabla u \cdot \nabla|\nabla u|^{p-2} + |\nabla u|^{p-2}\left[\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} + (n-1)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right] \\ &= \left(\frac{n-1}{p}\right)^p u^{p-1}.\end{aligned}$$

同时$|\nabla u|^p = \left(\dfrac{n-1}{p}\right)^p u^p$.

容易看出, 如果取定理 0.2 中$K = 1$, $\lambda = \left(\dfrac{n-1}{p}\right)^p$, 则式(5)和(6)均成为等式.

2　准备工作

u 是式(1)的正解, 令$f = \log u$, 则f 满足

$$\mathrm{div}(|\nabla f|^{p-2}\nabla f) + (p-1)|\nabla f|^p + \lambda = 0. \tag{8}$$

定义算子L 如下.

$$L\, g = \mathrm{div}(|\nabla f|^{p-2}\nabla g) + (p-2)\mathrm{div}(|\nabla f|^{p-4}(\nabla f \cdot \nabla g)\nabla f).$$

容易看出L 是$\triangle_p$ 在f 的线性化, 且是非负的. 对固定的$R > 0$, 令φ 是固定点$O \in M$ 为心, $2R$ 为半径的测地球$B(O, 2R)$ 上的正截断函数, 令$G = \varphi|\nabla f|^p$, 则G 在某点$x_0 \in B(O, 2R)$ 上取得$B(O, 2R)$ 的最大值, 在x_0, 有

$$\nabla G = 0, \tag{9}$$

$$\mathrm{L}G \leqslant 0. \tag{10}$$

因此在x_0, 有

$$\nabla|\nabla f|^r = -\frac{r}{p}G^{\frac{r}{p}}\varphi^{-1-\frac{r}{p}}\nabla\varphi. \tag{11}$$

由(8)式, 有

$$\triangle f = -(p-1)|\nabla f|^2 - \lambda|\nabla f|^{2-p} - \frac{p-2}{2}|\nabla f|^{-2}\nabla f \cdot \nabla|\nabla f|^2. \tag{12}$$

利用Ricci 恒等式$f_{ijj} = (\triangle f)_i + R_{ij}f_j$ 以及截面曲率以$-K$ 为下界的事实, 有

$$\begin{aligned}\triangle|\nabla f|^p &= \frac{p(p-2)}{4}|\nabla f|^{p-4}|\nabla|\nabla f|^2|^2 + \frac{p}{2}|\nabla f|^{p-2}\triangle|\nabla f|^2 \\ &= \frac{p(p-2)}{4}|\nabla f|^{p-4}|\nabla|\nabla f|^2|^2 + p|\nabla f|^{p-2}[f_{ij}^2 + \nabla f \cdot \nabla\triangle f + R_{ij}f_i f_j] \\ &\geqslant \frac{p(p-2)}{4}|\nabla f|^{p-4}|\nabla|\nabla f|^2|^2 \\ &\quad + p|\nabla f|^{p-2}[f_{ij}^2 + \nabla f \cdot \nabla\triangle f - (n-1)K|\nabla f|^2].\end{aligned} \tag{13}$$

利用式(8)和(13), 可得如下估计.

$$\begin{aligned}\mathrm{L}(|\nabla f|^p) \quad \geqslant \quad & p|\nabla f|^{2p-4}[|\nabla^2 f|^2+\frac{p-2}{2|\nabla f|^2}|\nabla|\nabla f|^2|^2+\frac{(p-2)^2}{4|\nabla f|^4}|\nabla f\cdot\nabla|\nabla f|^2|^2]\\ & -\frac{p^2(p-1)}{2}|\nabla f|^{2p-4}\nabla f\cdot\nabla|\nabla f|^2-(n-1)pK|\nabla f|^{2p-2}. \qquad (14)\end{aligned}$$

对二阶对称张量C_{ij}, 定义范数

$$\|C_{ij}\|_{\mathrm{L}}^2=(g_{ij}+\frac{(p-2)f_if_j}{|\nabla f|^2})(g_{kl}+\frac{(p-2)f_kf_l}{|\nabla f|^2})C_{ik}C_{jl}.$$

特别地,

$$\|\nabla^2 f\|_{\mathrm{L}}^2=|\nabla^2 f|^2+\frac{(p-2)|\nabla|\nabla f|^2|^2}{2|\nabla f|^2}+\frac{(p-2)^2|\nabla|\nabla f|^2\cdot\nabla f|^2}{4|\nabla f|^4}. \qquad (15)$$

(14)式可以重写为

$$\mathrm{L}(|\nabla f|^p)\geqslant p|\nabla f|^{2p-4}\|\nabla^2 f\|_{\mathrm{L}}^2-\frac{p^2(p-1)}{2}|\nabla f|^{2p-4}\nabla f\cdot\nabla|\nabla f|^2-(n-1)pK|\nabla f|^{2p-2}. \qquad (16)$$

考虑某一点的局部标准正交标架$\{e_1,\cdots,e_n\}$ 使得$|\nabla f|e_1=\nabla f$, 于是有如下的估计.

$$\begin{aligned}\|\nabla^2 f\|_{\mathrm{L}}^2 \quad = \quad & \sum_{i,j,k,l=1}^{n}(g_{ij}\delta_{ij}+(p-2)\delta_{i1}\delta_{j1})(g_{kl}+(p-2)\delta_{k1}\delta_{l1})f_{ik}f_{jl}\\ = \quad & \sum_{i,k=1}^{n}(1+(p-2)\delta_{i1})(1+(p-2)\delta_{k1})f_{ik}^2\\ \geqslant \quad & (1+(p-2)\delta_{11})^2f_{11}^2+\sum_{\alpha=2}^{n}(1+(p-2)\delta_{\alpha1})^2f_{\alpha\alpha}^2\\ & +2\sum_{\alpha=2}^{n}(1+(p-2)\delta_{11})(1+(p-2)\delta_{\alpha1})f_{1\alpha}^2\\ \geqslant \quad & (p-1)^2f_{11}^2+\frac{1}{n-1}(\triangle f-f_{11})^2+2(p-1)\sum_{\alpha=2}^{n}f_{1\alpha}^2.\end{aligned}$$

利用式(12), 有

$$\begin{aligned}\|\nabla^2 f\|_{\mathrm{L}}^2 \quad \geqslant \quad & (p-1)^2f_{11}^2+2(p-1)\sum_{\alpha=2}^{n}f_{1\alpha}^2\\ & +\frac{1}{n-1}[-(p-1)|\nabla f|^2-\lambda|\nabla f|^{2-p}-(p-1)f_{11}]^2\\ \geqslant \quad & \frac{n(p-1)^2}{n-1}\sum_{j=1}^{n}f_{1j}^2+\frac{1}{n-1}[(p-1)|\nabla f|^2+\lambda|\nabla f|^{2-p}]^2\\ & +\frac{2(p-1)f_{11}}{n-1}[(p-1)|\nabla f|^2+\lambda|\nabla f|^{2-p}]. \qquad (17)\end{aligned}$$

注意到式(16)和(17)以及$2f_{11}=|\nabla f|^{-2}\nabla|\nabla f|^2\cdot\nabla f$ 和

$$|\nabla|\nabla f|^2|^2=4\sum_{j=1}^{n}\Big(\sum_{i=1}^{n}f_if_{ij}\Big)^2=4f_1^2\sum_{j=1}^{n}f_{1j}^2=4|\nabla f|^2\sum_{j=1}^{n}f_{1j}^2,$$

我们将得到

$$\begin{aligned} L|\nabla f|^p \geqslant\ & \frac{np(p-1)^2}{4(n-1)}|\nabla f|^{2p-6}|\nabla|\nabla f|^2|^2-(n-1)pK|\nabla f|^{2p-2} \\ & +[\frac{p(p-1)(3p-2-pn)}{2(n-1)}+\frac{p(p-1)\lambda}{(n-1)|\nabla f|^p}]|\nabla f|^{2p-4}\nabla f\cdot\nabla|\nabla f|^2 \\ & +\frac{p}{n-1}|\nabla f|^{2p-4}[(p-1)|\nabla f|^2+\lambda|\nabla f|^{2-p}]^2. \end{aligned} \tag{18}$$

由 L 的定义, 可以计算

$$\begin{aligned} L\,G= \ & \varphi L|\nabla f|^p+|\nabla f|^{p-2}\nabla\varphi\cdot\nabla|\nabla f|^p+\nabla\varphi\cdot\nabla|\nabla f|^{2p-2} \\ & +|\nabla f|^{2p-2}\triangle\varphi+(p-2)(\nabla\varphi\cdot\nabla f)(\nabla f\cdot\nabla|\nabla f|^{2p-4}) \\ & +(p-2)|\nabla f|^{2p-4}\nabla(\nabla\varphi\cdot\nabla f)\cdot\nabla f+(p-2)|\nabla f|^{2p-4}(\nabla\varphi\cdot\nabla f)\triangle f \\ & +(p-2)|\nabla f|^{p-4}(\nabla f\cdot\nabla|\nabla f|^p)(\nabla f\cdot\nabla\varphi). \end{aligned} \tag{19}$$

由式(9)-(11)以及(19), 在极大值点x_0, 有如下不等式.

$$\begin{aligned} 0\geqslant\ & \frac{(p-1)(pn-5n+4)}{p(n-1)}G^{2-\frac{2}{p}}\varphi^{\frac{2}{p}-3}|\nabla\varphi|^2+\frac{p(p-1)^2}{n-1}G^2\varphi^{-1} \\ & +\frac{2p(p-1)\lambda}{n-1}G+\frac{2(p-1)(n-p)}{n-1}G^{2-\frac{2}{p}}\varphi^{\frac{2}{p}-2}\nabla f\cdot\nabla\varphi \\ & +\frac{p\lambda^2\varphi}{n-1}+\frac{2n-np-p}{n-1}\lambda G^{1-\frac{2}{p}}\varphi^{\frac{2}{p}-1}\nabla f\cdot\nabla\varphi+G^{2-\frac{2}{p}}\varphi^{\frac{2}{p}-2}\triangle\varphi \\ & -(n-1)pKG^{2-\frac{2}{p}}\varphi^{\frac{2}{p}-1}+(p-2)G^{2-\frac{4}{p}}\varphi^{\frac{4}{p}-2}\varphi_{ij}f_if_j \\ & +\frac{2(2-p)(p-1)}{p}G^{2-\frac{4}{p}}\varphi^{\frac{4}{p}-3}|\nabla\varphi\cdot\nabla f|^2. \end{aligned} \tag{20}$$

3　定理 0.2 的证明

考虑函数$\theta(t):[0,+\infty)\to[0,1]$,

$$\theta(t)=\begin{cases} 1 & 0\leqslant t\leqslant 1, \\ 0 & t\geqslant 2, \end{cases}$$

使得

$$-10\theta^{\frac{1}{2}}\leqslant\theta'\leqslant 0,|\theta''|\leqslant 10\theta. \tag{21}$$

定义光滑截断函数$\varphi:M\to\mathbf{R}$ 如下.

$$\varphi(x,t)=\theta\left(\frac{r(x)}{R}\right). \tag{22}$$

引理 3.1　对于φ, 有如下的估计.

$$\begin{aligned} & G^{2-\frac{2}{p}}\ \varphi^{\frac{2}{p}-2}\triangle\varphi+(p-2)G^{2-\frac{4}{p}}\varphi^{\frac{4}{p}-2}\varphi_{ij}f_if_j \\ & \qquad\geqslant\frac{(n+p-2)(1+\sqrt{K}R)G^{2-\frac{2}{p}}\varphi^{\frac{2}{p}-2}\theta'}{R^2}. \end{aligned} \tag{23}$$

证　明　由文献[6], 关于距离函数$r=r(x)=\mathrm{dist}(O,x)$, 由 Hessian 比较定理,

$$\nabla_i\nabla_j r \leqslant \sqrt{K}\coth(\sqrt{K}r)\mathrm{g}_{ij} \leqslant \frac{1+\sqrt{K}r}{r}\mathrm{g}_{ij}. \tag{24}$$

注意到$\mathrm{g}_{ij}+(p-2)\dfrac{f_if_j}{|\nabla f|^2}$ 非负, 由式(24), 我们有

$$(\mathrm{g}_{ij}+(p-2)\frac{f_if_j}{|\nabla f|^2})r_{ij} \leqslant \frac{1+\sqrt{K}r}{r}(n+p-2).$$

又

$$\begin{aligned} &G^{2-\frac{2}{p}}\ \varphi^{\frac{2}{p}-2}\triangle\varphi+(p-2)G^{2-\frac{4}{p}}\varphi^{\frac{4}{p}-2}\varphi_{ij}f_if_j \\ &\quad=\frac{G^{2-\frac{2}{p}}\varphi^{\frac{2}{p}-2}\theta'}{R}\left[\triangle r+\frac{(p-2)r_{ij}f_if_j}{|\nabla f|^2}\right]+\frac{G^{2-\frac{2}{p}}\varphi^{\frac{2}{p}-2}\theta''}{R^2}\left[1+\frac{(p-2)|\nabla f\cdot\nabla r|^2}{|\nabla f|^2}\right], \end{aligned}$$

以及

$$1+\frac{(p-2)|\nabla f\cdot\nabla r|^2}{|\nabla f|^2}=Tr_L(\nabla r\otimes\nabla r)\geqslant 0.$$

因此式(23)正确. **证毕.**

利用$\nabla f\cdot\nabla\varphi\geqslant -|\nabla f||\nabla\varphi|$ 和引理 3.1, (20)式变为

$$\begin{aligned} &\frac{(p-1)(5n-pn-4)}{p(n-1)}\frac{G^{2-\frac{2}{p}}\varphi^{\frac{2}{p}-3}|\theta'|^2}{R^2} \\ &\geqslant\frac{p(p-1)^2G^2\varphi^{-1}}{n-1}+\frac{2p(p-1)\lambda G}{n-1}-\frac{2(p-1)(n-p)}{n-1}\frac{G^{2-\frac{1}{p}}\varphi^{\frac{1}{p}-2}|\theta'|}{R} \\ &\quad+\frac{p\lambda^2\varphi}{n-1}-\frac{|2n-np-p|\lambda}{n-1}\frac{G^{1-\frac{1}{p}}\varphi^{\frac{1}{p}-1}|\theta'|}{R} \\ &\quad-(n-1)pKG^{2-\frac{2}{p}}\varphi^{\frac{2}{p}-1}+\frac{(n+p-2)(1+\sqrt{K}R)G^{2-\frac{2}{p}}\varphi^{\frac{2}{p}-2}\theta'}{R^2}. \end{aligned} \tag{25}$$

注意到x_0 是最大值点, 在 $B(O,R)$ 上$\varphi=1$, 因此$\varphi(x_0)|\nabla f|^p(x_0)\geqslant\sup_{B(O,R)}|\nabla f|^p(x)$.

另外, 容易看出 $\varphi(x_0)|\nabla f|^p(x_0)\leqslant\varphi(x_0)\sup_{B(O,2R)}|\nabla f|^p(x)$. 如果记

$$\sigma(R)=\frac{\sup_{B(O,R)}|\nabla f|^p(x)}{\sup_{B(O,2R)}|\nabla f|^p(x)}, \tag{26}$$

则

$$\sigma(R)\leqslant\varphi(x_0)\leqslant 1. \tag{27}$$

利用关于θ 的条件以及式(27), 在x_0, 有

$$\begin{aligned} &\frac{100(p-1)(5n-pn-4)}{p(n-1)}\frac{G^{2-\frac{2}{p}}}{R^2}+\frac{20(p-1)(n-p)}{n-1}\frac{G^{2-\frac{1}{p}}}{R} \\ &\quad+\frac{10|2n-np-p|\lambda}{n-1}\frac{G^{1-\frac{1}{p}}}{R}+\frac{10(n+p-2)(1+\sqrt{K}R)G^{2-\frac{2}{p}}}{R^2} \\ &\geqslant\frac{p(p-1)^2G^2}{n-1}+\frac{2p(p-1)\lambda\sigma(R)G}{n-1} \\ &\quad+\frac{p\lambda^2\sigma(R)^2}{n-1}-(n-1)pKG^{2-\frac{2}{p}}\sigma(R)^{\frac{2}{p}}. \end{aligned} \tag{28}$$

引理 3.2　对$\epsilon > 0, A, B, D > 0$, 有

$$AG^{2-\frac{2}{p}} \leqslant \epsilon G + (2-p)[2(p-1)\epsilon^{-1}]^{\frac{2(p-1)}{2-p}} p^{\frac{p}{p-2}} A^{\frac{p}{2-p}}, \tag{29}$$

$$BG^{2-\frac{1}{p}} \leqslant \epsilon G^2 + \frac{1}{p}(2^{-1}B)^{2p}[(2-\frac{1}{p})\epsilon^{-1}]^{2p-1}, \tag{30}$$

$$DG^{1-\frac{1}{p}} \leqslant \epsilon G + \frac{1}{p}D^p[(1-\frac{1}{p})\epsilon^{-1}]^{p-1}. \tag{31}$$

证　明　我们仅证明不等式(29), 令

$$f(G) = \epsilon G - AG^{2-\frac{2}{p}} + +(2-p)[2(p-1)\epsilon^{-1}]^{\frac{2(p-1)}{2-p}} p^{\frac{p}{p-2}} A^{\frac{p}{2-p}},$$

于是 $f'(G) = \epsilon - A\left(2-\frac{2}{p}\right)G^{1-\frac{2}{p}}$, $G_0 = [\epsilon p(2A(p-1))^{-1}]^{\frac{p}{p-2}}$ 是 $f(G)$ 的最小值点, 并且可以验证 $f(G_0) = 0$, 因此(29)式成立. **证毕.**

利用引理 3.2, 对正常数$\epsilon < \frac{p(p-1)^2}{n-1}, \delta > 0$, 由(28)式有

$$\begin{aligned} 0 \geqslant & \left[\frac{p(p-1)^2}{n-1} - \epsilon\right]G^2 + \left[\frac{2p(p-1)\lambda\sigma(R)}{n-1} - 3\epsilon - (n-1)pK\sigma(R)^{\frac{2}{p}}\delta\right]G \\ & + \frac{p\lambda^2\sigma^2(R)}{n-1} - (n-1)(2-p)\left[\frac{2(p-1)}{p\delta}\right]^{\frac{2(p-1)}{2-p}} K\sigma(R)^{\frac{2}{p}} \\ & - C_1R^{-\frac{2p}{2-p}} - C_2R^{-2p} - C_3\lambda^pR^{-p} - C_4\left(\frac{1+\sqrt{K}R}{R^2}\right)^{\frac{p}{2-p}}, \end{aligned} \tag{32}$$

其中 C_i 表示仅仅依赖于n, p, ϵ 的正常数. 于是对$x \in B(O, R)$, 有

$$|\nabla f|^p(x) = \varphi(x)|\nabla f|^p(x) = G(x) \leqslant \frac{-F + \sqrt{F^2 - 4EH}}{2E}, \tag{33}$$

其中

$$E = \frac{p(p-1)^2}{n-1} - \epsilon, \tag{34}$$

$$F = \frac{2p(p-1)\lambda\sigma(R)}{n-1} - 3\epsilon - (n-1)pK\sigma(R)^{\frac{2}{p}}\delta, \tag{35}$$

$$\begin{aligned} H = & \frac{p\lambda^2\sigma^2(R)}{n-1} - (n-1)(2-p)[\frac{2(p-1)}{p\delta}]^{\frac{2(p-1)}{2-p}} K\sigma(R)^{\frac{2}{p}} \\ & - C_1R^{-\frac{2p}{2-p}} - C_2R^{-2p} - C_3\lambda^pR^{-p} - C_4(\frac{1+\sqrt{K}R}{R^2})^{\frac{p}{2-p}}. \end{aligned} \tag{36}$$

注意到当 $R \to +\infty$ 时 $\sigma(R) \to 1$, 因此

$$F \to \frac{2p(p-1)\lambda}{n-1} - 3\epsilon - (n-1)pK\delta, \quad H \to \frac{p\lambda^2}{n-1} - (n-1)(2-p)\left[\frac{2(p-1)}{p\delta}\right]^{\frac{2(p-1)}{2-p}} K.$$

在(33)式中令 $R \to +\infty$ 以及 $\epsilon \to 0+$, 得对任意的 $x \in M$ 以及 $\delta > 0$, 有

$$|\nabla f|^p(x) \leqslant -\frac{\lambda}{p-1} + \frac{(n-1)^2K\delta}{2(p-1)^2} + \frac{n-1}{2p(p-1)^2}\sqrt{I}, \tag{37}$$

其中

$$I=-4p^2(p-1)K\delta\lambda+(n-1)^2p^2K^2\delta^2+(2(p-1))^{\frac{2}{2-p}}(2-p)p^{\frac{4-3p}{2-p}}\delta^{-\frac{2p-2}{2-p}}K. \tag{38}$$

由式(37)知 $I\geqslant 0$, 即

$$\lambda\leqslant\frac{(n-1)^2K\delta}{4(p-1)}+2^{\frac{2p-2}{2-p}}(2-p)\left[\frac{p-1}{p\delta}\right]^{\frac{p}{2-p}}. \tag{39}$$

式(39)的右边是 $\delta>0$ 的函数, 通过计算导数, 容易看出

$$\delta_0=2(p-1)p^{-(p-1)}(n-1)^{-(2-p)}K^{-\frac{2-p}{2}} \tag{40}$$

是最小值点. 在式(37), (38)中令 $\delta=\delta_0$ 将得到式(5)以及

$$I(\delta_0)=8p^{3-2p}(p-1)^2(n-1)^{2p-2}K^p-8p^{3-p}(p-1)^2(n-1)^{p-2}K^{\frac{p}{2}}\lambda. \tag{41}$$

由式(37)得

$$\begin{aligned}|\nabla f|^p(x)\leqslant\ & -(p-1)^{-1}\lambda+(n-1)^pp^{1-p}(p-1)^{-1}K^{\frac{p}{2}}\\ & +(p-1)^{-1}\sqrt{2p^{1-2p}(n-1)^{2p}K^p-2p^{1-p}(n-1)^pK^{\frac{p}{2}}\lambda},\end{aligned}$$

即式(6)成立.

为了说明 Harnack 不等式(7)成立, 考虑如下的极小测地线 $\gamma(s):[0,1]\to M$, 使得 $\gamma(0)=x,\gamma(1)=y$, 由式(6)有

$$\begin{aligned}\ln\frac{u(y)}{u(x)} &= \int_0^1\frac{\mathrm{d}\ln u(\gamma(s))}{\mathrm{d}s}\mathrm{d}s=\int_0^1\frac{\gamma'\cdot\nabla u(\gamma(s))}{u(\gamma(s))}\ \mathrm{d}s\\ &\leqslant \int_0^1|\gamma'|\frac{|\nabla u(\gamma(s))|}{u(\gamma(s))}\ \mathrm{d}s\leqslant r(x_1,x_2)C^{1/p}.\end{aligned}$$

因此(7)式成立, 这就完成了定理 0.2 的证明.

[参 考 文 献]

[1] YAU S T. Harmonic functions on complete Riemannian manifold[J]. Comm Pure Appl Math, 1975, 28: 201-208.

[2] CHENG S Y, YAU S T. Differential equations on Riemannian manifolds and there geometric applications[J]. Comm Pure Appl Math, 1975, 28: 333-354.

[3] PETER LI, WANG J P. Complete manifolds with positive spectrum II[J]. J Diff Geom, 2002, 62: 143-162.

[4] MATEI A M. First eigenvalue for the p-Laplace operator[J]. Nonlinear Anal Ser A: Theory Methods, 2000, 39 (8): 1051-1068.

[5] TAKEUCHI H. On the first eigenvalue of the p-Laplacian in a Riemannian manifold[J]. Tokyo J Math, 1998, 21: 135-140.

[6] FLECKINGER J, EVANS M H II, FRANCOIS D T. On the fundamental eigenvalue ratio of the p-Laplacian[J]. Bull Sci math, 2007, 131: 613-619.

[7] 陈省身, 陈维桓. 微分几何讲义[M]. 北京: 北京大学出版社, 1983.
CHEN S S, CHEN W H. Lectures on Differential Geometry[M]. Beijing: Beijing University Press, 1983.