

文章编号: 1000-5641(2013)01-0041-06

两族集值渐近非扩张映射的不动点收敛定理

宋传静, 吴健荣

(苏州科技学院 数理学院 江苏 苏州 215011)

摘要: 研究一致凸 Banach 空间中两族集值渐近非扩张映射的公共不动点逼近问题. 构造关于两族集值渐近非扩张映射的有限步迭代序列; 在适当条件下, 证明了该序列收敛到公共不动点的一些强收敛定理; 改进和推广了一些相关文献的结果.

关键词: 一致凸 Banach 空间; 集值渐近非扩张映射; 有限步迭代序列; 公共不动点

中图分类号: O177 **文献标志码:** A **DOI:** 10.3969/j.issn.1000-5641.2013.01.007

Convergence theorems for the fixed points of two finite families of set-valued asymptotically nonexpansive mappings

SONG Chuan-jing, WU Jian-rong

(School of Mathematics and Physics, Suzhou University of Science and Technology,
Suzhou Jiangsu 215011, China)

Abstract: The common fixed points of two finite families of set-valued asymptotically nonexpansive mappings were studied in real uniformly convex Banach spaces. A finite-step iteration process for these two families was introduced, and some strong convergence theorems for this scheme were proved. The results improve and extend some recent relative results.

Key words: uniformly convex Banach space; set-valued asymptotically nonexpansive mapping; finite-step iteration process; common fixed points

0 引言与预备知识

除非特别说明, 本文总是设 E 是赋范线性空间, $CB(E)$ 表示 E 中一切非空有界闭子集的集合族, $F(T)$ 表示映射 T 的不动点集合. $\forall A, B \in CB(E)$, $x \in E$, 记

$$\delta(A, B) = \sup\{\|x - y\| : x \in A, y \in B\}, \quad d(x, A) = \inf\{\|x - y\| : y \in A\}.$$

收稿日期: 2012-04

基金项目: 江苏省研究生培养创新工程(CXZZ11_0950); 苏州科技学院研究生科研创新计划(SK CX11S_054)

第一作者: 宋传静, 女, 硕士研究生, 主要从事非线性分析的研究. E-mail: songchuanjing123@163.com.

通信作者: 吴健荣, 男, 教授, 主要研究方向为非线性分析及其在控制理论中的应用.

E-mail: jrwu@mail.usts.edu.cn.

对单值映射及单值映射族的不动点收敛问题, 已经有很多作者进行了研究, 如文献 [1-6]. 然而, 关于集值映射的研究却很少有人问津. 2009 年, 李红玉^[7]在一致凸 Banach 空间中, 讨论了 δ 集值非扩张映射不动点非空的充要条件及 Ishikawa 迭代序列收敛到不动点的条件, 映射定义及 Ishikawa 迭代算法如下.

定义 0.1^[7] 设 E 是赋范线性空间, $D \subseteq E$, 称 $T : D \rightarrow CB(D)$ 为 δ 集值非扩张映射, 若 $\forall x, y \in D$,

$$\delta(Tx, Ty) \leq \|x - y\|.$$

算法^[7] 设 D 是赋范线性空间 E 的非空有界凸子集, $T : D \rightarrow CB(D)$, 且 $\{t_n\}, \{s_n\}$ 是二实数列满足 $0 \leq t_n, s_n \leq 1, n = 1, 2, 3, \dots$, 构造 D 中的序列 $\{x_n\}$ 如下: 取 $\forall x_1 \in D, u_1 \in Tx_1$, 令 $y_1 = (1 - s_1)x_1 + s_1u_1$, 则存在 $v_1 \in Ty_1$ 有 $\|v_1 - u_1\| \leq \delta(Tx_1, Ty_1)$; 令 $x_2 = (1 - t_1)x_1 + t_1v_1$, 则取 $u_2 \in Tx_2$, 有 $\|u_2 - v_1\| \leq \delta(Tx_2, Ty_1)$. 如此进行下去得:

$$x_{n+1} = (1 - t_n)x_n + t_nv_n, \quad y_n = (1 - s_n)x_n + s_nu_n.$$

这里 $u_n \in Tx_n, v_n \in Ty_n, \|u_{n+1} - v_n\| \leq \delta(Tx_{n+1}, Ty_n), \|u_n - v_n\| \leq \delta(Tx_n, Ty_n)$.

本文是在文献 [7] 的基础上, 通过构造集值映射下的有限步迭代序列, 研究两族 δ 集值渐近非扩张映射在一致凸 Banach 空间中的不动点收敛定理.

定义 0.2 设 E 是赋范线性空间, $D \subseteq E$, 称 $T : D \rightarrow CB(D)$ 为 δ 集值渐近非扩张映射, 如果存在 $h_n \in [1, \infty), \lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 1$ 使得对任意的 $n \geq 1$, 有

$$\delta(T^n x, T^n y) \leq h_n \|x - y\|, \quad \forall x, y \in D.$$

显然, 有下面的结果.

命题 0.1 设 D 是实 Banach 空间 E 的非空凸子集, $S_l, T_l : D \rightarrow CB(D) (l = 1, 2, \dots, N)$ 是 $2N$ 个 δ 集值渐近非扩张映射, 则存在数列 $\{h_n\} \subset [1, \infty), \lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 1$ 使得对于所有的 $l = 1, 2, \dots, N$, 有

$$\delta(T_l^n x, T_l^n y) \leq h_n \|x - y\|, \quad \delta(S_l^n x, S_l^n y) \leq h_n \|x - y\|, \quad \forall x, y \in D, n \geq 1.$$

本文给出的有限步迭代算法如下.

定义 0.3 设 $\{a_n^{(i)}\}$ 是实数列且满足 $a_n^{(i)} \in [0, 1] (i \in \{1, 2, \dots, N\})$, 构造 D 中序列 $\{x_n\}$ 如下: 取 $x_1 \in D$. 当 $n \geq 1$ 时, 令

$$x_n^{(0)} = x_n, \quad \text{取 } u_n^{(0)} \in T_1^n x_n^{(0)}, \quad v_n^{(0)} \in S_1^n x_n^{(0)};$$

$$x_n^{(1)} = (1 - a_n^{(1)})v_n^{(0)} + a_n^{(1)}u_n^{(0)}, \quad \text{取 } u_n^{(1)} \in T_2^n x_n^{(1)}, \quad v_n^{(1)} \in S_2^n x_n^{(1)};$$

$$x_n^{(2)} = (1 - a_n^{(2)})v_n^{(1)} + a_n^{(2)}u_n^{(1)}, \quad \text{取 } u_n^{(2)} \in T_3^n x_n^{(2)}, \quad v_n^{(2)} \in S_3^n x_n^{(2)};$$

.....

$$x_n^{(N-1)} = (1 - a_n^{(N-1)})v_n^{(N-2)} + a_n^{(N-1)}u_n^{(N-2)}, \quad \text{取 } u_n^{(N-1)} \in T_N^n x_n^{(N-1)}, \quad v_n^{(N-1)} \in S_N^n x_n^{(N-1)};$$

$$x_n^{(N)} = (1 - a_n^{(N)})v_n^{(N-1)} + a_n^{(N)}u_n^{(N-1)};$$

$$x_{n+1} = x_n^{(N)}.$$

下面的引理对于证明本文的主要结果起着重要作用.

引理 0.1^[2] 设 $\{a_n\}_{n=1}^\infty$, $\{u_n\}_{n=1}^\infty$ 是非负实数列, 且对于任意的 $n \geq 1$, $a_{n+1} \leq (1 + u_n)a_n$, 如果 $\sum_{n=0}^\infty u_n < \infty$, 则

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ 存在;
- (2) 如果 $\{a_n\}$ 有一个子序列 $\{a_{n_k}\}$ 收敛到 0, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

引理 0.2^[5] 设 E 是一致凸 Banach 空间, $\{x_n\} \subset E$, $\{y_n\} \subset E$, $t_n \in [\delta, 1 - \delta] (n \geq 1)$, $\delta \in (0, 1)$, 如果下面的条件:

$$\begin{cases} \limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| \leq a, \\ \limsup_{n \rightarrow \infty} \|y_n\| \leq a, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \|t_n x_n + (1 - t_n)y_n\| = a, \end{cases}$$

成立, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - y_n\| = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|y_n\| = a$, 其中 $a \geq 0$ 是个常数.

1 主要结果

首先, 给出下面的引理.

引理 1.1 设 D 是一致凸 Banach 空间 E 的非空闭凸子集, $S_l, T_l : D \rightarrow CB(D) (l = 1, 2, \dots, N)$ 是 $2N$ 个 δ 集值渐近非扩张映射, 其中, $\{h_n\}$ 满足 $\{h_n\} \subset [1, \infty)$, $\sum_{n=1}^\infty ((h_n)^N - 1) < \infty$, $\{x_n\}$ 如定义 0.3. 设 $F = \cap_{l=1}^N (F(S_l) \cap F(T_l)) \neq \emptyset$, 则对所有的 $p \in F$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\|$ 存在.

证 明 对于任意的 $p \in F$, 有

$$\begin{aligned} \|x_n^{(1)} - p\| &= \|(1 - a_n^{(1)})(v_n^{(0)} - p) + a_n^{(1)}(u_n^{(0)} - p)\| \\ &\leq (1 - a_n^{(1)})\|v_n^{(0)} - p\| + a_n^{(1)}\|u_n^{(0)} - p\| \\ &\leq (1 - a_n^{(1)})\delta(S_1^n x_n^{(0)}, S_1^n p) + a_n^{(1)}\delta(T_1^n x_n^{(0)}, T_1^n p) \\ &\leq (1 - a_n^{(1)})h_n\|x_n - p\| + a_n^{(1)}h_n\|x_n - p\| \\ &= h_n\|x_n - p\|, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|x_n^{(2)} - p\| &= \|(1 - a_n^{(2)})(v_n^{(1)} - p) + a_n^{(2)}(u_n^{(1)} - p)\| \\ &\leq (1 - a_n^{(2)})\|v_n^{(1)} - p\| + a_n^{(2)}\|u_n^{(1)} - p\| \\ &\leq (1 - a_n^{(2)})\delta(S_2^n x_n^{(1)}, S_2^n p) + a_n^{(2)}\delta(T_2^n x_n^{(1)}, T_2^n p) \\ &\leq (1 - a_n^{(2)})h_n\|x_n^{(1)} - p\| + a_n^{(2)}h_n\|x_n^{(1)} - p\| \\ &\leq (h_n)^2\|x_n - p\|. \end{aligned}$$

如此下去, 可得

$$\begin{aligned}
 \|x_{n+1} - p\| &= \|x_n^{(N)} - p\| = \|(1 - a_n^{(N)})(v_n^{(N-1)} - p) + a_n^{(N)}(u_n^{(N-1)} - p)\| \\
 &\leq (1 - a_n^{(N)})\|v_n^{(N-1)} - p\| + a_n^{(N)}\|u_n^{(N-1)} - p\| \\
 &\leq (1 - a_n^{(N)})\delta(S_N^n x_n^{(N-1)}, S_N^n p) + a_n^{(N)}\delta(T_N^n x_n^{(N-1)}, T_N^n p) \\
 &\leq (1 - a_n^{(N)})h_n\|x_n^{(N-1)} - p\| + a_n^{(N)}h_n\|x_n^{(N-1)} - p\| \\
 &\leq (h_n)^N\|x_n - p\|.
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

设 $\alpha_n = (h_n)^N - 1$, 则可得

$$\|x_{n+1} - p\| \leq (1 + \alpha_n)\|x_n - p\|.$$

因为 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n < \infty$, 由引理 0.1 可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\|$ 存在.

引理 1.2 设 $D, S_l, T_l : D \rightarrow CB(D) (l = 1, 2, \dots, N)$ 及 $\{h_n\}$ 同引理 1.1, $\{x_n\}$ 如定义 0.3, 其中 $a_n^{(i)} \in [\delta, 1 - \delta], 0 < \delta < \frac{1}{2}, i \in \{1, 2, \dots, N\}$. 设 $F = \cap_{l=1}^N (F(S_l) \cap F(T_l)) \neq \emptyset$, 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - v_n^{(i)}\| = 0 (i \in \{0, 1, 2, \dots, N-1\})$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, T_i x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, S_i x_n) = 0, i \in \{1, 2, \dots, N\}$.

证 明 由引理 1.1 知对任意的 $p \in F$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\|$ 存在, 不妨设 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\| = d$. 由式 (1.1) 知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|(1 - a_n^{(N)})(v_n^{(N-1)} - p) + a_n^{(N)}(u_n^{(N-1)} - p)\| = d.$$

又因为

$$\begin{aligned}
 \limsup_{n \rightarrow \infty} \|v_n^{(N-1)} - p\| &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \delta(S_N^n x_n^{(N-1)}, S_N^n p) \\
 &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} h_n\|x_n^{(N-1)} - p\| \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} (h_n)^N \|x_n - p\| = d,
 \end{aligned}$$

同理可得 $\limsup_{n \rightarrow \infty} \|u_n^{(N-1)} - p\| \leq d$. 故由引理 0.2 可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n^{(N-1)} - u_n^{(N-1)}\| = 0, \text{ 且 } \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n^{(N-1)} - p\| = d.$$

而

$$\begin{aligned}
 d &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n^{(N-1)} - p\| \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \delta(T_N^n x_n^{(N-1)}, T_N^n p) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} h_n\|x_n^{(N-1)} - p\| \\
 &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} h_n\|x_n^{(N-1)} - p\| \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} (h_n)^N \|x_n - p\| = d,
 \end{aligned}$$

故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_n\|x_n^{(N-1)} - p\| = d,$$

从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n^{(N-1)} - p\| = d$. 而

$$d = \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n^{(N-1)} - p\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \|(1 - a_n^{(N-1)})(v_n^{(N-2)} - p) + a_n^{(N-1)}(u_n^{(N-2)} - p)\|,$$

再由引理 0.2 和 $\limsup_{n \rightarrow \infty} \|v_n^{(N-2)} - p\| \leq d$, $\limsup_{n \rightarrow \infty} \|u_n^{(N-2)} - p\| \leq d$, 可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n^{(N-2)} - u_n^{(N-2)}\| = 0.$$

如此下去, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n^{(i)} - u_n^{(i)}\| = 0, \quad \forall i \in \{0, 1, 2, \dots, N-1\}. \quad (1.2)$$

再由式 (1.2) 和题设条件可得:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - u_n^{(i)}\| = 0, \quad \forall i \in \{0, 1, 2, \dots, N-1\}. \quad (1.3)$$

又

$$\begin{aligned} \|x_{n+1} - x_n\| &= \|x_n^{(N)} - x_n\| = \|(1 - a_n^{(N)})(v_n^{(N-1)} - x_n) + a_n^{(N)}(u_n^{(N-1)} - x_n)\| \\ &\leq (1 - a_n^{(N)})\|v_n^{(N-1)} - x_n\| + a_n^{(N)}\|u_n^{(N-1)} - x_n\|, \\ \|x_n^{(i-1)} - x_n\| &= \|(1 - a_n^{(i-1)})(v_n^{(i-2)} - x_n) + a_n^{(i-1)}(u_n^{(i-2)} - x_n)\| \\ &\leq (1 - a_n^{(i-1)})\|v_n^{(i-2)} - x_n\| + a_n^{(i-1)}\|u_n^{(i-2)} - x_n\|, \end{aligned}$$

因此由题设条件和式 (1.3) 可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_{n+1} - x_n\| = 0, \quad (1.4)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n^{(i-1)} - x_n\| = 0, \quad \forall i \in \{2, 3, \dots, N\}.$$

而当 $i = 1$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n^{(i-1)} - x_n\| = 0$ 显然成立, 所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n^{(i-1)} - x_n\| = 0, \quad \forall i \in \{1, 2, 3, \dots, N\}. \quad (1.5)$$

再由式 (1.3)、(1.5) 和

$$d(x_n, T_i^n x_n) \leq d(x_n, T_i^n x_n^{(i-1)}) + \delta(T_i^n x_n^{(i-1)}, T_i^n x_n) \leq \|x_n - u_n^{(i-1)}\| + h_n \|x_n^{(i-1)} - x_n\|,$$

可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, T_i^n x_n) = 0, \quad \forall i \in \{1, 2, 3, \dots, N\}. \quad (1.6)$$

而

$$\begin{aligned} d(x_n, T_i x_n) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, T_i^{n+1} x_{n+1}) + \delta(T_i^{n+1} x_{n+1}, T_i^{n+1} x_n) + \delta(T_i^{n+1} x_n, T_i x_n) \\ &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, T_i^{n+1} x_{n+1}) + h_{n+1} \|x_{n+1} - x_n\| + h_1 d(x_n, T_i^n x_n), \end{aligned}$$

故由式 (1.4)、(1.6) 可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, T_i x_n) = 0, \quad \forall i \in \{1, 2, 3, \dots, N\}.$$

同理可证

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, S_i x_n) = 0, \quad \forall i \in \{1, 2, 3, \dots, N\}.$$

下面来证明本文的主要定理.

定理 1.1 在引理 1.2 的假设下, 如果 D 是 E 的非空紧凸子集, 则 $\{x_n\}$ 收敛到 $\{T_1, T_2, \dots, T_N, S_1, S_2, \dots, S_N\}$ 的某个公共不动点.

证明 由 $\{x_n\} \subset D$ 紧可得, 存在 $\{x_{n_k}\} \subset \{x_n\}$ 使得 $x_{n_k} \rightarrow x^* \in D, k \rightarrow \infty$. 由引理 1.2 及

$$\begin{aligned} d(x^*, T_i x^*) &\leq d(x^*, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, T_i x_{n_k}) + \delta(T_i x_{n_k}, T_i x^*) + \delta(T_i^{n+1} x_n, T_i x_n) \\ &\leq d(x^*, x_{n_k}) + d(x_{n_k}, T_i x_{n_k}) + h_1 d(x^*, x_{n_k}), \end{aligned}$$

可得 $\forall i \in \{1, 2, 3, \dots, N\}$, 当 $k \rightarrow \infty$ 时, $d(x^*, T_i x^*) = 0$. 同理可得 $d(x^*, S_i x^*) = 0$, 故 $x^* \in F$. 又由引理 1.1 的证明知 $\forall p \in F, \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - p\|$ 都存在, 所以 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x^*\| = 0$.

定理 1.2 在引理 1.1 的假设下, 序列 $\{x_n\}$ 强收敛到 $\{T_1, T_2, \dots, T_N, S_1, S_2, \dots, S_N\}$ 的公共不动点当且仅当 $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, F) = 0$.

证明 必要性显然, 只需证充分性. 首先证明 $\{x_n\}$ 是 D 中的 Cauchy 列. 事实上, 在引理 1.1 的证明中已得 $\|x_{n+1} - p\| \leq (1 + \alpha_n)\|x_n - p\|$, 那么对于任意的正整数 $m, n, m > n$ 和 $1 + x \leq e^x (x \geq 0)$ 可得

$$\begin{aligned} \|x_m - p\| &\leq (1 + \alpha_{m-1})\|x_{m-1} - p\| \leq e^{\alpha_{m-1}}\|x_{m-1} - p\| \\ &\leq e^{\alpha_{m-1}}[(1 + \alpha_{m-2})\|x_{m-2} - p\|] \leq e^{\alpha_{m-1}}(e^{\alpha_{m-2}}\|x_{m-2} - p\|) \\ &\leq e^{\alpha_{m-1} + \alpha_{m-2}}\|x_{m-2} - p\| \\ &\leq \dots \\ &\leq e^{\sum_{i=n}^{m-1} \alpha_i} \|x_n - p\| \leq e^{\sum_{i=n}^{\infty} \alpha_i} \|x_n - p\| \\ &= M\|x_n - p\|, \end{aligned}$$

其中 $M = e^{\sum_{i=n}^{\infty} \alpha_i}$. 因此, 对于任意的 $p \in F$, 有

$$\|x_n - x_m\| \leq \|x_n - p\| + \|x_m - p\| \leq (1 + M)\|x_n - p\|,$$

由 p 的任意性可得: $\|x_n - x_m\| \leq (1 + M)d(x_n, F)$. 由 $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, F) = 0$ 知 $\{x_n\}$ 是 D 中的 Cauchy 列.

因为 D 为闭集, 所以存在 $p_0 \in D$ 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = p_0$. 又由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, F) = 0$, 故 $d(p_0, F) = \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, F) = 0$. 又 F 为 D 中的闭集, 故 $p_0 \in F$. 此定理得证.

定理 1.3 在引理 1.2 的假设下, 如果有一个 T_i 或 $S_i (1 \leq i \leq N)$ 和 $s > 0$ 使得

$$d(x, T_i x) \geq sd(x, F) \text{ 或 } d(x, S_i x) \geq sd(x, F), \forall x \in D.$$

则序列 $\{x_n\}$ 强收敛到 $\{T_1, T_2, \dots, T_N, S_1, S_2, \dots, S_N\}$ 的公共不动点.

证明 由引理 1.2 知对于任意的 $\forall i \in \{1, 2, 3, \dots, N\}, \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, T_i x_n) = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, S_i x_n) = 0$. 则由题设条件可得对某个常数 $s > 0$, 有 $\lim_{n \rightarrow \infty} sd(x_n, F) = 0$. 故由定理 1.2 可知此定理得证.

(下转第 75 页)

以看出集合 $F_{2^3 1^2}$ 中不存在两个元素具有相同的广义 τ -不变量. 因此由引理 4.1 可知集合 $F_{2^3 1^2}$ 是 $E_{2^3 1^2}$ 的一个左胞腔代表元集合且其中含有 12 个元素.

由上面证明可知引理 4.2 中条件 (1)–(2) 成立. 由图 10 可知集合 $F_{2^3 1^2}$ 中不存在两个元素具有相同广义 τ -不变量而且集合 F_1 与 F_2 都是 $E_{2^3 1^2}$ 中右连通的子集, 因此引理 4.2 中的条件 (3) 成立. 经检验可知集合 $E'_{2^3 1^2}$ 与 $E''_{2^3 1^2}$ 满足引理 4.2 中条件 (4). 因此集合 $E_{2^3 1^2}$ 是两个双边胞腔 $E'_{2^3 1^2}$ 与 $E''_{2^3 1^2}$ 的并.

[参 考 文 献]

- [1] SHI J Y. The cells of affine Weyl groups $\tilde{C}_n$ in a certain quasi-split case[EB/OL]. Preprint. [2012-12-29]. <http://math.ecnu.edu.cn/~jyshi/myart/quasisplit1.pdf>
- [2] LUSZTIG G. Hecke Algebras with Unequal Parameters [M]. CRM Monograph Series 18. Providence: AMS, 2003.
- [3] SHI J Y. The Kazhdan-Lusztig cells in certain affine Weyl groups [M]. Lecture Notes in Math 1179. Berlin: Springer-Verlag, 1986.
- [4] Greene C. Some partitions associated with a partially ordered set [J]. J Comb Theory(A), 1976, 20: 69-79.

(上接第 46 页)

[参 考 文 献]

- [1] OSILIKE M O, UDOMENE A. Weak and strong convergence theorems for fixed points of asymptotically non-expansive mappings[J]. Math Comput Modelling, 2000, 32: 1181-1191.
- [2] 李智, 崔云安, 张新. 渐近似非扩张映射的三步迭代序列的收敛定理[J]. 哈尔滨商业大学学报: 自然科学版, 2009, 25(2): 234-236.
- [3] CHIDUME C E, SHAHZAD N. Strong convergence of an implicit iteration process for a finite family of nonexpansive mappings[J]. Nonlinear Analysis, 2005, 62: 1149-1156.
- [4] CHIDUME C E, ALI B. Weak and strong convergence theorems for finite families of asymptotically nonexpansive mapping in Banach spaces[J]. J Math Anal Appl, 2007, 330: 377-387.
- [5] SITTHIKUL K, SAEJUNG S. Convergence theorems for a finite family of nonexpansive and asymptotically nonexpansive mappings[J]. Acta Univ Palack Olomuc Math Appl, 2009, 48: 139-152.
- [6] CHEN W X, GUO W P. Convergence theorems for two finite families of asymptotically nonexpansive mappings [J]. Math and Computer Modelling, 2011, 54(5-6): 1311-1319.
- [7] 李红玉, 陈汝栋, 李红智. 集值非扩张映射不动点存在与收敛性[J]. 数学的实践与认识, 2009, 39(2): 135-139.

(上接第 60 页)

- [7] RIPPON P J, STALLARD G M. Iteration of a class of hyperbolic meromorphic functions[J]. Pro Amer Math Soc, 1999, 127: 3251-3258.
- [8] WANG Y F, FANG M L. Picard values and normal families of meromorphic function with zeros[J]. Acta Math Sinica, 1998, 14: 17-26.
- [9] PANG X C, ZALCMAN L. Normal families of meromorphic functions whose derivatives omit a function[J]. Comput. Methods Funct, 2002(2): 257-265.
- [10] 顾永兴, 庞学诚, 方明亮. 正规族理论及其应用[M]. 北京: 科学出版社, 2007: 57-58.
- [11] GU Y X. A normal criterion of meromorphic families[J]. Scientia Sinica. Mathematical Issue(I), 1997: 267-274.