文章编号: 1000-5641(2023)02-0012-05

强 Gorenstein 弱平坦模

宋彦辉, 郭 婷

(兰州信息科技学院, 兰州 730300)

摘要: 引入强 Gorenstein 弱平坦模, 给出了强 Gorenstein 弱平坦模的一些同调刻画. 证明了 Gorenstein 弱平坦模是强 Gorenstein 弱平坦模的直和项.

关键词: 超有限表现模; 弱平坦模; 强 Gorenstein 弱平坦模; 直和项

中图分类号: O154.2 **文献标志码**: A **DOI**: 10.3969/j.issn.1000-5641.2023.02.003

Strongly Gorenstein weak flat modules

SONG Yanhui, GUO Ting

(*Lanzhou College of Information Science and Technology, Lanzhou* 730300, *China*)

Abstract: In this paper, we introduce the notion of strongly Gorenstein weak flat modules, and we subsequently provide homological characterizations of strongly Gorenstein weak flat modules. It is shown that a Gorenstein weak flat module is a summand of a strongly Gorenstein weak flat module.

Keywords: super finitely presented module; weak flat module; strongly Gorenstein weak flat module; summand

0 引 言

自 20 世纪 60 年代以来, Gorenstein 同调代数受到学者们的广泛关注. 文献 [1] 介绍了当 R 是双边 Noether 环时, 有限生成 R-模 M 的 Gorenstein 维数, 即 $\text{G-dim}_R M$. Enochs 等[2] 推广了经典的平坦模, 引入 Gorenstein 平坦模. 近十年来, 众多学者对 Gorenstein 平坦模进行了深入广泛的研究和推广[3-8]. 其中, 文献 [6] 引入了强 Gorenstein 平坦模, 给出了该模的许多性质, 证明了 Gorenstein 平坦模是某个强 Gorenstein 平坦模的直和项. 文献 [9]对平坦模进行了推广, 引入弱平坦模, 并探讨了相关性质. 文献 [10] 推广了弱平坦模的概念, 引入并研究了 Gorenstein 弱平坦模, 给出了相关的性质和等价刻画.

受以上工作的启发, 本文引入了强 Gorenstein 弱平坦模, 给出了其等价刻画, 并证明了 Gorenstein 弱平坦模是某个强 Gorenstein 弱平坦模的直和项.

1 预备知识

本文中的环 R 均指有单位元的结合环, 所有模均是酉模. 未解释的标记、事实和概念见参考文献 [3,11-12]. 下面回顾一些基本概念.

令 $f: M \to N$ 是左 R-模同态, f 的核、余核和象分别记为 $\mathrm{Ker}f$、$\mathrm{Coker}f$、$\mathrm{Im}f$.

收稿日期: 2021-04-02
基金项目: 甘肃省高校教师创新基金项目 (2023B-387)
第一作者: 宋彦辉, 男, 讲师, 研究方向为同调代数. E-mail: 20191110117@lzxk.edu.cn

定义 1[13] 设 L 是左 R-模. 若存在一个左 R-模的正合列 $\cdots \to P_1 \to P_0 \to L \to 0$, 其中所有的 P_i 都是有限生成投射模, 则称 L 是超有限表现模. 显然超有限表现模是有限表现的.

定义 2[9] 设 F 是右 R-模. 若对任意超有限表现左 R-模 L, 都有 $\mathrm{Tor}_1^R(F, L) = 0$, 则称 F 是弱平坦模. 显然平坦模是弱平坦的.

定义 3[10] 设 M 是右 R-模. 若存在一个右 R-模的正合列

$$\mathcal{F} = \cdots \to F_1 \to F_0 \to F^0 \to F^1 \to \cdots,$$

其中 F_i, F^i 为弱平坦模, 使得 $M \cong \mathrm{Coker}(F_0 \to F^0)$, 并且对任意投射维数有限的超有限表现左 R-模 L, $\mathcal{F} \otimes_R L$ 是正合的, 则称 M 是 Gorenstein 弱平坦模. 显然每个 (弱) 平坦模是 Gorenstein 弱平坦模.

2 强 Gorenstein 弱平坦模

本章引入强 Gorenstein 弱平坦模的概念, 并给出它的一些同调性质.

定义 4 设 M 是右 R-模, 如果存在弱平坦右 R-模的正合列

$$\mathcal{F} = \cdots \xrightarrow{f} F \xrightarrow{f} F \xrightarrow{f} F \xrightarrow{f} \cdots,$$

使得 $M \cong \mathrm{Ker} f$, 且对任意投射维数有限的超有限表现左 R-模 L, 函子 $-\otimes_R L$ 保持序列 $\mathcal{F}$ 正合, 则称 M 是强 Gorenstein 弱平坦模.

显然, 平坦模是强 Gorenstein 弱平坦模, 每个强 Gorenstein 弱平坦模是 Gorenstein 弱平坦模. 由对称性可知, 定义 4 中 $\mathcal{F}$ 的所有核、余核及象都是强 Gorenstein 弱平坦模.

命题 1 强 Gorenstein 弱平坦右 R-模的类对直和与直积封闭.

证 明 设 $\{M_i\}_{i\in I}$ 是一族强 Gorenstein 弱平坦右 R-模. 则对任意 $i \in I$, 存在弱平坦右 R-模的正合列

$$\mathcal{F}_i = \cdots \xrightarrow{f_i} F_i \xrightarrow{f_i} F_i \xrightarrow{f_i} F_i \xrightarrow{f_i} \cdots,$$

使得 $M_i \cong \mathrm{Ker} f_i$, 且对任意投射维数有限的超有限表现左 R-模 L, $\mathcal{F}_i \otimes_R L$ 是正合的. 于是有正合列

$$\bigoplus_{i\in I} \mathcal{F}_i = \cdots \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} F_i \xrightarrow{\bigoplus_{i\in I} f_i} \bigoplus_{i\in I} F_i \xrightarrow{\bigoplus_{i\in I} f_i} \bigoplus_{i\in I} F_i \longrightarrow \cdots,$$

且 $\bigoplus_{i\in I} M_i \cong \mathrm{Ker}(\bigoplus_{i\in I} f_i)$, 其中 $\bigoplus_{i\in I} F_i$ 是弱平坦右 R-模[9]. 对任意投射维数有限的超有限表现左 R-模 L, 由于 $(\bigoplus_{i\in I} F_i) \otimes_R L \cong \bigoplus_{i\in I}(F_i \otimes_R L)$, 考虑以下交换图:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots \longrightarrow & \left(\bigoplus_{i\in I} F_i\right) \otimes_R L & \longrightarrow & \left(\bigoplus_{i\in I} F_i\right) \otimes_R L & \longrightarrow & \left(\bigoplus_{i\in I} F_i\right) \otimes_R L & \longrightarrow \cdots \\
& \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & \\
\cdots \longrightarrow & \bigoplus_{i\in I}(F_i \otimes_R L) & \longrightarrow & \bigoplus_{i\in I}(F_i \otimes_R L) & \longrightarrow & \bigoplus_{i\in I}(F_i \otimes_R L) & \longrightarrow \cdots .
\end{array}$$

因为上图中第二行序列是正合的, 所以第一行序列也正合, 故 $\bigoplus_{i\in I} M_i$ 是强 Gorenstein 弱平坦模, 即强 Gorenstein 弱平坦模的类对直和封闭.

由文献 [9] 可知, 弱平坦模的类对直积封闭, 从而 $\prod_{i\in I} \mathcal{F}_i$ 中的元素是弱平坦右 R-模. 注意到 L 是投射维数有限的超有限表现左 R-模, 再由文献 [14] 可知, $\left(\prod_{i\in I} F_i\right) \otimes_R L \cong \prod_{i\in I}(F_i \otimes_R L)$. 考虑以下

交换图:

$$
\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \left(\prod_{i\in I} F_i\right)\otimes_R L \arrow[r] \arrow[d, "\wr"'] & \left(\prod_{i\in I} F_i\right)\otimes_R L \arrow[r] \arrow[d, "\wr"'] & \left(\prod_{i\in I} F_i\right)\otimes_R L \arrow[r] \arrow[d, "\wr"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \prod_{i\in I}(F_i\otimes_R L) \arrow[r] & \prod_{i\in I}(F_i\otimes_R L) \arrow[r] & \prod_{i\in I}(F_i\otimes_R L) \arrow[r] & \cdots .
\end{tikzcd}
$$

因为第二行序列是正合的, 所以第一行序列也正合, 故 $\prod_{i\in I} M_i$ 是强 Gorenstein 弱平坦模, 即强 Gorenstein 弱平坦模的类对直积封闭.

下面给出强 Gorenstein 弱平坦模的等价刻画.

定理 1 设 M 是右 R-模. 则以下断言等价:

(1) M 是强 Gorenstein 弱平坦模;

(2) 存在右 R-模的正合列 $0\to M\to F\to M\to 0$, 其中 F 是弱平坦模, 且对任意投射维数有限的超有限表现左 R-模 L, 有 $\mathrm{Tor}_1^R(M,L)=0$;

(3) 存在右 R-模的正合列 $0\to M\to F\to M\to 0$, 其中 F 是弱平坦模, 且对任意投射维数有限的超有限表现左 R-模 L, 序列 $0\to M\otimes_R L\to F\otimes_R L\to M\otimes_R L\to 0$ 是正合的.

证 明 “(1) $\Rightarrow$ (2)”由定义 4 可得. “(2) $\Rightarrow$ (3)”显然成立.

“(3) $\Rightarrow$ (1)”. 由条件知, 存在右 R-模的正合列 $0\to M\to F\to M\to 0$, 其中 F 是弱平坦模, 于是存在以下交换图:

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & 0 \arrow[dr] & & 0 & & 0 \arrow[dr] & & 0 & & \\
 & & & M \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & M \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \\
\cdots \arrow[rr] & & F \arrow[ur] \arrow[rr] & & F \arrow[rr] \arrow[dr] & & F \arrow[ur] \arrow[rr] & & F \arrow[rr] \arrow[dr] & & \cdots . \\
 & M \arrow[ur] & & & & M \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & M \arrow[dr] & \\
0 \arrow[ur] & & & & 0 \arrow[ur] & & 0 & & & & 0
\end{tikzcd}
$$

设 L 是投射维数有限的超有限表现左 R-模, 则有正合列 $0\to M\otimes_R L\to F\otimes_R L\to M\otimes_R L\to 0$. 考虑以下交换图:

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & 0 \arrow[dr] & & 0 & & 0 \arrow[dr] & & 0 & & \\
 & & & M\otimes_R L \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & M\otimes_R L \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \\
\cdots \arrow[rr] & & F\otimes_R L \arrow[ur] \arrow[rr] & & F\otimes_R L \arrow[rr] \arrow[dr] & & F\otimes_R L \arrow[ur] \arrow[rr] & & F\otimes_R L \arrow[rr] \arrow[dr] & & \cdots . \\
 & M\otimes_R L \arrow[ur] & & & & M\otimes_R L \arrow[ur] \arrow[dr] & & & & M\otimes_R L \arrow[dr] & \\
0 \arrow[ur] & & & & 0 \arrow[ur] & & 0 & & & & 0
\end{tikzcd}
$$

所以序列 $\cdots\to F\otimes_R L\to F\otimes_R L\to F\otimes_R L\to\cdots$ 是正合的, 即 M 是强 Gorenstein 弱平坦模.

推论 1 设 M 是强 Gorenstein 弱平坦右 R-模. 则对任意投射维数有限的超有限表现左 R-模 L 及任意的 $n\geqslant 1$, $\mathrm{Tor}_n^R(M,L)=0$.

命题 2　弱平坦模是强 Gorenstein 弱平坦的.

证　明　设 F 是弱平坦右 R-模. 考虑正合列

$$\mathcal{F}=\cdots\xrightarrow{f}F\oplus F\xrightarrow{f}F\oplus F\xrightarrow{f}F\oplus F\xrightarrow{f}\cdots,$$

$$f:(x,y)\mapsto(0,x),$$

则有 $0\oplus F=\mathrm{Ker}f=\mathrm{Im}f\cong F$. 设 L 是投射维数有限的超有限表现左 R-模, 将函子 $-\otimes_R L$ 作用于 $\mathcal{F}$ 上, 得到以下交换图:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & (F\oplus F)\otimes_R L \arrow[r, "f\otimes L"] \arrow[d, "\cong"'] & (F\oplus F)\otimes_R L \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & (F\otimes_R L)\oplus(F\otimes_R L) \arrow[r] & (F\otimes_R L)\oplus(F\otimes_R L) \arrow[r] & \cdots .
\end{tikzcd}$$

因为上图中第二行序列是正合的, 所以第一行序列也正合. 故 F 是强 Gorenstein 弱平坦右 R-模.

设 M 是左 R-模. 由文献 [12] 可知, 如果 M 有长度为 n 的投射分解, 即存在正合列

$$0\to P_n\to\cdots\to P_0\to M\to 0,$$

其中所有的 P_i 都是投射模, 则称 M 的投射维数小于等于 n. 此时记作 $\mathrm{pd}_R M\leqslant n$. 下面减弱定义 4 中强 Gorenstein 弱平坦模的条件.

命题 3　设 M 是右 R-模, 则 M 是强 Gorenstein 弱平坦模当且仅当存在弱平坦右 R-模的正合列

$$\mathcal{F}=\cdots\xrightarrow{f}F\xrightarrow{f}F\xrightarrow{f}F\xrightarrow{f}\cdots,$$

使得 $M\cong\mathrm{Ker}f$.

证　明　($\Rightarrow$)由定义 4, 显然成立.

($\Leftarrow$)由定义 4 可知, 只需证对任意投射维数有限的超有限表现左 R-模 L, $\mathcal{F}\otimes_R L$ 是正合的. 不妨设 $\mathrm{pd}_R L=n<+\infty$, 对 n 运用数学归纳法来证明. 当 $n=0$ 时, 结论显然成立. 令 $n\geqslant 1$, 假设结论对 $n-1$ 成立. 因为 L 是超有限表现模, 所以存在左 R-模的正合列 $0\to K\to P\to L\to 0$, 其中 P 是有限生成投射模, K 是超有限表现模, 从而 $\mathrm{pd}_R K\leqslant n-1<+\infty$. 由于 $\mathcal{F}$ 中元素都是弱平坦模, 从而有复形的正合列

$$0\to\mathcal{F}\otimes_R K\to\mathcal{F}\otimes_R P\to\mathcal{F}\otimes_R L\to 0,$$

其中 $\mathcal{F}\otimes_R P$ 正合. 由归纳假设知, $\mathcal{F}\otimes_R K$ 是正合的. 因此 $\mathcal{F}\otimes_R L$ 正合.

通过命题 3, 可以减弱定理 1 中强 Gorenstein 弱平坦模的等价条件, 得到以下结论.

命题 4　设 M 是右 R-模. 则以下等价:

(1) M 是强 Gorenstein 弱平坦模;

(2) 存在弱平坦右 R-模的正合列 $\mathcal{F}=\cdots\xrightarrow{f}F\xrightarrow{f}F\xrightarrow{f}F\xrightarrow{f}\cdots$ 使得 $M\cong\mathrm{Ker}f$;

(3) 存在右 R-模的正合列 $0\to M\to F\to M\to 0$, 其中 F 是弱平坦模.

以下通过强 Gorenstein 弱平坦模给出 Gorenstein 弱平坦模的新性质.

定理 2　设 M 是右 R-模. 若 M 是 Gorenstein 弱平坦模, 则 M 是某个强 Gorenstein 弱平坦模的直和项.

证　明　因为 M 是 Gorenstein 弱平坦模, 所以存在弱平坦右 R-模的正合列

$$\mathcal{F}=\cdots\to F_1\xrightarrow{d_1}F_0\xrightarrow{d_0}F_{-1}\xrightarrow{d_{-1}}F_{-2}\xrightarrow{d_{-2}}\cdots,$$

使得 $M \cong \mathrm{Im}\, d_0$, 且对任意投射维数有限的超有限表现左 R-模 L, $-\otimes_R L$保持序列 $\mathcal{F}$ 正合. 对任意 $i \in \mathbb{Z}$, $\Sigma^m \mathcal{F}$ 表示一个右 R-模的正合列, 其中 $(\Sigma^m \mathcal{F})_i = F_{i-m}$, $d_i^{\Sigma^m \mathcal{F}} = d_{i-m}$. 考虑正合列

$$\mathcal{W} = \bigoplus(\Sigma^m \mathcal{F}) := \cdots \longrightarrow W = \bigoplus F_i \xrightarrow{\bigoplus d_i} W = \bigoplus F_i \xrightarrow{\bigoplus d_i} W = \bigoplus F_i \xrightarrow{\bigoplus d_i} \cdots.$$

因为 $\mathrm{Im}(\bigoplus d_i) \cong \bigoplus \mathrm{Im}\, d_i$, 所以 M 是 $\mathrm{Im}(\bigoplus d_i)$ 的直和项. 由文献 [9] 可知, $\bigoplus F_i$是弱平坦右 R-模, 再由命题 3 可得 $\mathrm{Im}(\bigoplus d_i)$ 是强 Gorenstein 弱平坦模, 因此 M 是强 Gorenstein 弱平坦模的直和项.

[参 考 文 献]

[1] AUSLANDER M, BRIDGER M. Stable Module Theory [M]. Rhode Island: American Mathematical Society, 1969.

[2] ENOCHS E E, JENDA O M G, TORRECILLAS B. Gorenstein 平坦模 [J]. 南京大学学报数学半年刊, 1993, 10(1): 1-9.

[3] HOLM H. Gorenstein homological dimensions [J]. Journal of Pure and Applied Algebra, 2004, 189: 167-193.

[4] BENNIS D. Rings over which the class of Gorenstein flat modules is closed under extensions [J]. Communications in Algebra, 2009, 37(3): 855-868.

[5] DING N Q, LI Y L, MAO L X. Strongly Gorenstein flat modules [J]. Journal of the Australian Mathematical Society, 2009, 86(3): 323-338.

[6] BENNIS D, MAHDOU N. Strongly Gorenstein projective, injective, and flat modules [J]. Journal of Pure and Applied Algebra, 2007, 210: 437-445.

[7] HOLM H. Gorenstein projective, injective and flat modules [D]. Copenhagen: University of Copenhagen, 2004.

[8] YANG X Y, LIU Z K. Strongly Gorenstein projective, injective and flat modules [J]. Journal of Algebra, 2008, 320: 2659-2674.

[9] GAO Z H, WANG F G. Weak injective and weak flat modules [J]. Communications in Algebra, 2015, 43(9): 3857-3868.

[10] ZHAO T, XU Y. Remarks on Gorenstein weak injective and weak flat modules [J]. Algebra Colloquium, 2020, 27(4): 687-702.

[11] ANDERSON F W, FULLER K R. Rings and Categories of Modules [M]. New York: Spring-Verlag, 1992.

[12] ROTMAN J J. An Introduction to Homological Algebra [M]. New York: Academic Press, 1979.

[13] HUMMEL L, MARLEY T. The Auslander-Bridger formula and the Gorenstein property for coherent rings [J]. Journal of Commutative Algebra, 2009, 1(2): 283-314.

[14] ENOCHS E E, JENDA O M G. Relative Homological Algebra [M]. Berlin: Water de Gruyter, 2000.

(责任编辑: 陈丽贞)